

**Una possibile Soluzione *delle* singolarità della
Fisica Moderna**

Una probabile Causa della Gravità

I Fotogravitoni

28/11/2006

Indice

Abstract	pag. 3
Introduzione	4
La catastrofe ultravioletta	5
Una possibile soluzione della singolarità	7
Dal Micro al Macrocosmo e viceversa	15
Questioni dimensionali ?	21
L'equivalenza tra l'atomo di idrogeno ed un comune circuito RLC	23
La Gravità come fenomeno di Mutua Induzione Magnetica ?	28
Ortogonalità tra induttanza ed accelerazione	31
Considerazioni	34
Pensieri eccessivamente vaghi	38
Esperimento Crucis – I fotogravitoni	39
Esperimenti di laboratorio	44
La materia e l'interazione elettromagnetica	45
Gli acceleratori di particelle	46
Superconduttività e Momento di Cooper	51
Gravità e campi elettromagnetici	52
Bibliografia	56
Appendice	57
Tabella di conversione	58

*La Verità, per definizione, dovrebbe essere
la più semplice ed innocente delle Bugie.*

Abstract

E' possibile mostrare che la cosiddetta Catastrofe Ultravioletta, prevista da Rayleigh e Jeans (R&J), ed espressa dalla nota formula

$$P_{Vol} = C \frac{KT}{\lambda^4},$$

in netto contrasto con i rilievi sperimentali del Corpo Nero per le piccole lunghezze d'onda, è riconducibile alla congenita e ben nota singolarità della formula di Coulomb (Newton) (sistema c.g.s.)

$$F = \frac{q_1 q_2}{d^2} = \frac{q_1 q_2}{\psi^2}$$

che si ha per $d = \psi \rightarrow 0$.

E' da osservare che la teoria (Meccanica quantistica) susseguente alla soluzione proposta da Planck non risolve la detta singolarità, soluzione invece possibile.

Poiché l'eliminazione della detta singolarità discende in modo immediato dalla nuova relazione

$$\lambda = 2 \pi 137 \psi$$

relativa al quanto elementare, gran parte di questo scritto mostra come sia possibile giungere alla precedente equazione considerando un circuito elettromagnetico oscillante RLC e cioè la sua validità anche in campo *macroscopico*. Durante questo percorso si avrà modo, tra l'altro, di rileggere il fenomeno dell'effetto fotoelettrico, l'equivalenza tra massa ed energia e di incontrare inediti e significativi aspetti dell'onda elettromagnetica.

Un particolare aspetto dell'induzione magnetica permette poi di collegare la gravità ai fenomeni elettromagnetici, vera e propria unificazione dell'elettromagnetismo e della gravità. Ciò consente una inedita soluzione della singolarità dei cosiddetti buchi neri, corrispondente alla vecchia catastrofe ultravioletta di Rayleigh e Jeans, e l'identificazione dei gravitoni come **veri e propri fotoni a tutti gli effetti**, anch'essi interamente e completamente appartenenti allo spettro elettromagnetico anche se **estremo** (bassissime frequenze).

Introduzione

Come si mostrerà nella presente nota, è possibile eliminare le due singolarità che affliggono la fisica moderna, quella della Meccanica Quantistica e l'altra della Relatività Generale (Gravitazione Universale di Newton), giungendo, in quest'ultimo caso, ad una unificazione della gravità con le altre interazioni note. Si ritiene opportuno riportare integralmente la parte iniziale dell'articolo di Christopher J. Isham e del Nobel Abdus Salam **Gravitazione ed elettrodinamica quantistica** [7] del 1973 che tratteggia ancora la situazione attuale.

La teoria della relatività e la meccanica quantistica sono senza alcun dubbio due delle maggiori conquiste intellettuali del secolo (appena scorso). Ambedue queste teorie hanno alterato drasticamente la visione che l'uomo ha del mondo della materia e hanno avuto un'influenza decisiva sullo sviluppo della fisica durante gli ultimi cinquant'anni; per relatività si intende naturalmente tutta la teoria di Einstein, cioè sia la relatività generale che quella speciale.

La meccanica quantistica, la relatività speciale e quella generale sono tutte estensioni della meccanica di Newton in differenti campi della fisica; si può dire che mentre la meccanica quantistica tratta i fenomeni atomici e subatomici, la relatività speciale riguarda le velocità che si avvicinano a quella della luce e la relatività generale descrive i fenomeni gravitazionali e quelli che si verificano su scala astronomica nell'universo.

A causa della grande importanza di queste teorie è comprensibile che si sia dedicato un grande sforzo di ricerca al tentativo di unificarle, sin dai tempi del loro sorgere. Poiché la relatività speciale è collegabile facilmente a quella generale, il compito più gravoso è quello di incorporarvi la meccanica quantistica. Se, ad esempio, si vuole descrivere il moto di un elettrone o di altre particelle elementari dotate di alte velocità, si ha bisogno di una versione relativistica (nel senso della relatività speciale) della meccanica quantistica. Il punto essenziale è che la famosa equazione di Einstein $E = m C^2$ permette alle particelle di trasformarsi in energia raggiante e viceversa. La possibilità di creare e annihilare particelle non è contemplata nella versione originaria della meccanica quantistica e sono perciò necessarie delle ampie modifiche per poter incorporare questi fenomeni nella teoria; lo schema più adatto a questo scopo è quello della teoria quantistica e relativistica dei campi in cui le particelle sono considerate come quanti di un campo.

Questo articolo però riguarda più da vicino la combinazione della meccanica quantistica e della relatività generale, poiché, in quanto la teoria di Einstein è basata sul campo gravitazionale, la sua quantizzazione tende a utilizzare le tecniche della teoria quantistica dei campi, con i gravitoni in funzione dei quanti. Il compito di unificare queste due strutture risulta particolarmente affascinante poiché implica delle considerevoli difficoltà concettuali oltre che di tecnica matematica, che derivano dal ruolo particolare assunto in fisica dal campo gravitazionale a causa della sua interazione universale con tutta la materia e l'energia. Il problema di stabilire se è desiderabile e possibile dal punto di vista pratico, oltre che da quello di principio, quantizzare il campo gravitazionale nel quadro della relatività generale viene dibattuto da parecchi anni. Esso ha infatti diversi aspetti, a seconda che si cerchi di descrivere degli effetti quantistici puramente locali della gravitazione, o se si abbia il progetto più ambizioso di quantizzare tutto l'universo! Nel secondo caso sorgono difficoltà filosofiche di tipo fondamentale in rapporto agli assiomi di base della teoria, mentre nel primo, che riguarda più direttamente il tema di questo articolo, queste difficoltà fortunatamente non sorgono. Prima di affrontare questo problema c'è però da chiedersi in primo luogo perché si debba quantizzare il campo gravitazionale; una risposta a questa domanda è che ogni campo classico dotato di modi radiativi è quantizzato, come pure la materia, e che sarebbe spiacevole da un punto di vista estetico se il campo gravitazionale non fosse soggetto allo stesso procedimento, benché si debba aggiungere obiettivamente che, poiché la gravitazione ha delle proprietà uniche rispetto alle altre forze naturali, questo argomento non è così persuasivo come potrebbe apparire a prima vista.

Due ragioni molto più stringenti per quantizzare il campo gravitazionale sono la possibilità di usare questo fatto per eliminare due gravi difetti che sorgono nella relatività generale e nella teoria quantistica dei campi. Uno dei progressi più recenti nella relatività generale di tipo classico è stato quello della dimostrazione, da parte di S. Hawking, R. Penrose e altri, che, sotto ipotesi fisiche molto ragionevoli, la varietà che descrive lo spazio tempo avrà inevitabilmente delle singolarità nel futuro (o ne ha avuta una nel passato); questo fatto è strettamente collegato al fenomeno del collasso gravitazionale e rappresenta evidentemente il segnale dell'invalidazione di una teoria che non può più essere usata per prevedere ciò che accade al di là di un (o in quel preciso) istante di tempo (quello della singolarità). Si è sperato a lungo che l'inclusione della meccanica quantistica permettesse di eliminare questo difetto introducendo fluttuazioni statistiche intrinseche nella geometria dello spazio tempo che consentano alla struttura in fase di collasso di 'rimbalzare' dalla configurazione singolare e riprendere l'evoluzione. D'altro canto uno dei gravi difetti della normale teoria quantistica dei campi è che, se si cerca di ottenere dei risultati confrontabili con l'esperienza mediante uno sviluppo in serie di tipo perturbativo (e questa è la sola tecnica finora conosciuta per ottenere dei risultati), la maggior parte dei termini divengono infiniti, rendendo inutile la teoria. Un esame accurato di queste singolarità (che sono totalmente diverse dalle singolarità dello spazio-tempo verificatesi nel collasso gravitazionale) fa intravedere la possibilità di eliminarle e di rendere ragionevole la teoria mediante l'inclusione in essa di fluttuazioni quantistiche del campo gravitazionale. Questo aspetto della teoria quantistica della gravitazione ha costituito l'oggetto delle ricerche degli autori di questo articolo, in collaborazione con J. Strathdee, e verrà ora trattato. ...

E' opportuno che durante l'escursus di questo articolo, il Lettore tenga presente quanto ora riportato.

1 - La Catastrofe Ultravioletta

Possiamo giungere alla nota espressione

$$P_{Vol} = C \frac{KT}{\lambda^4}, \tag{1.1}$$

che esprime la distribuzione della radianza spettrale del Corpo Nero secondo R&J, in una maniera molto semplice che ci consente però di riportare la detta Catastrofe alla nota singolarità espressa dalla

$$F = \frac{q_1 q_2}{d^2} = \frac{q_1 q_2}{\psi^2}.$$

In effetti la (1.1) non è altro che una potenza volumica e quindi possiamo scrivere

$$P_{Vol} = E \frac{C}{\lambda} \frac{1}{\lambda^3} \tag{1.2}$$

e cioè abbiamo un'energia E che divisa per un tempo pari a C/λ e divisa ancora per il volume λ^3 ci dà proprio la potenza volumica cercata. La (1.2) può essere ancora riscritta

$$P_{Vol} = E \frac{C}{\lambda} \frac{1}{\lambda^3} = mv^{-2} \frac{C}{\lambda} \frac{1}{\lambda^3} = C \frac{KT}{\lambda^4} \tag{1.3}$$

e quindi si ottiene la nota formula di R&J. Possiamo immaginare che affinché la formula di R&J sia conforme ai fatti sperimentali debba essere del tipo

$$P_{Vol} = C \frac{KT}{\lambda^4} [x] \tag{1.4}$$

e cioè che sia, in linea di principio¹, determinabile teoricamente un termine $[x]$ che la riconduca a predire i fatti sperimentali che invece essa lambisce *solo per grandi lunghezze d'onda*. Una soluzione di questo tipo è possibile [1]. Si potrebbe sospettare, almeno per un momento, che una correzione relativistica della (1.3) possa generare un opportuno cutt-off per le alte frequenze, ma è facile intuire che questa correzione diventa sensibile solo per velocità della massa m paragonabili alla velocità della luce. Ma tale velocità è unica e per giunta elevatissima mentre invece il cutt-off deve essere variabile come lo è la temperatura, così come lo è, come si vedrà, quello generato dalla soluzione planckiana.

E' intanto opportuno osservare che la (1.3), *se si ipotizza l'esistenza di un campo elettrico*, può anche essere scritta

$$P_{Vol} = mv^{-2} \frac{C}{\lambda} \frac{1}{\lambda^3} = \frac{e^2}{\psi} \frac{C}{\lambda^4} \tag{1.5}$$

¹ Ad esempio, perfezionando il povero modello utilizzato da R&J e che è costituito dall'oscillatore armonico.

avendo indicato con e la carica dell'elettrone e con ψ l'ampiezza media di vibrazione della carica che emette energia elettromagnetica, energia che noi avvertiamo sotto forma di calore. E' dunque opportuno evidenziare che si è sostituito il termine $m v^{-2}$ con il termine e^2 / ψ . In tal caso la (1.5) può essere scritta

$$P_{Vol} = \frac{e^2 C}{\psi \lambda^4} = \frac{2\pi 137 e^2 C}{2\pi 137 \psi \lambda^4} = \frac{hC C}{\lambda \lambda^4} = \frac{hC^2}{\lambda^5} \quad (1.6)$$

con la nuova posizione

$$\lambda = 2 \pi 137 \psi \quad (1.7)$$

la quale consente una inedita rilettura dell'opera di Planck. La (1.7) discende in modo rigoroso da una diversa impostazione per lo studio dell'interazione onda corpuscolo [2], impostazione dalla quale dovrebbe discendere anche una ulteriore e completamente nuova soluzione del problema del Corpo Nero. Detto per inciso, la plausibilità della (1.7) la si può anche avere, ad esempio, dalla relazione planckiana relativa al Corpo Nero che consente di determinare la lunghezza d'onda in corrispondenza della quale si ha la massima emittenza. Essa, com'è noto, è

$$\lambda_{E_{max}} \simeq \frac{1}{5} \frac{hC}{KT} = \frac{1}{5} \frac{2 \pi 137 e^2}{mC^2} \quad (1.8)$$

e, posto

$$\psi_{E_{max}} = \frac{1}{5} \frac{e^2}{mC^2}, \quad (1.9)$$

si ha ancora

$$\lambda_{E_{max}} = 2\pi 137 \psi_{E_{max}}. \quad (1.10)$$

Ritornando alla (1.6) si osserva subito che essa coincide con la prima parte dell'equazione sperimentale di Planck che, come è ben noto, risulta essere

$$P_{Vol} = \frac{hC^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hC}{KT\lambda}\right) - 1}. \quad (1.11)$$

Ciò equivale a dire che anche alla (1.5) manca una correzione del tipo

$$P_{Vol} = \frac{e^2}{\psi} \frac{C}{\lambda^4} [x] \quad (1.12)$$

che è interamente attribuibile al termine e^2 / ψ . Infatti il termine C / λ^4 ci consente solo di trasformare un'energia in una potenza volumica. Dunque la mancata aderenza ai fatti sperimentali della (1.5) e della (1.12) va attribuita interamente al termine esprimente l'energia e^2 / ψ . Ma questo termine discende dalla formula di Coulomb

$$F = \frac{e^2}{\psi^2} \tag{1.13}$$

e dunque la Catastrofe ultravioletta coincide con l'innata singolarità della fisica classica che nemmeno l'attuale Meccanica quantistica è riuscita a rimuovere. Da ciò deriva che dalla relazione sperimentale di Planck discende una soluzione della congenita singolarità della Meccanica classica esprimibile dalla (1.13) per $\psi \rightarrow 0$.

2 - Una possibile soluzione della singolarità

Se si parte dalla soluzione proposta da Planck (o anche da quella riportata in [1]), tenuto conto della (1.7), si ha che l'energia è data da

$$E = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{KT}\right) - 1} = \frac{\frac{hC}{\lambda}}{\exp\left(\frac{hC}{m\bar{C}^2 \lambda}\right) - 1} = \frac{\frac{e^2}{\psi}}{\exp\left(\frac{e^2}{\psi m\bar{C}^2}\right) - 1} \tag{2.1}$$

e quindi la forza media che avverte l'elettrone in un contesto atomico caratterizzato da un determinato livello medio di energia $m\bar{C}^2$ è pari a

$$F = -\frac{\partial E}{\partial \psi} = \frac{e^2}{\psi^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{e^2}{\psi m\bar{C}^2}\right) - 1} \left[1 - \frac{\frac{e^2}{\psi} \exp\left(\frac{e^2}{\psi m\bar{C}^2}\right)}{m\bar{C}^2 \left[\exp\left(\frac{e^2}{\psi m\bar{C}^2}\right) - 1 \right]} \right]. \tag{2.2}$$

oppure, posto

$$R = \frac{e^2}{m\bar{C}^2} \tag{2.3}$$

$$F = \frac{e^2}{\psi^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{R}{\psi}\right) - 1} \left[1 - \frac{R}{\psi} \frac{\exp\left(\frac{R}{\psi}\right)}{\left[\exp\left(\frac{R}{\psi}\right) - 1 \right]} \right], \tag{2.4}$$

la quale ha l'andamento rilevabile dalla Fig. 1. In detta figura è riportata anche la legge di Coulomb che va all'infinito per $\psi \rightarrow 0$. Esiste una tale forza anche in gravità ?

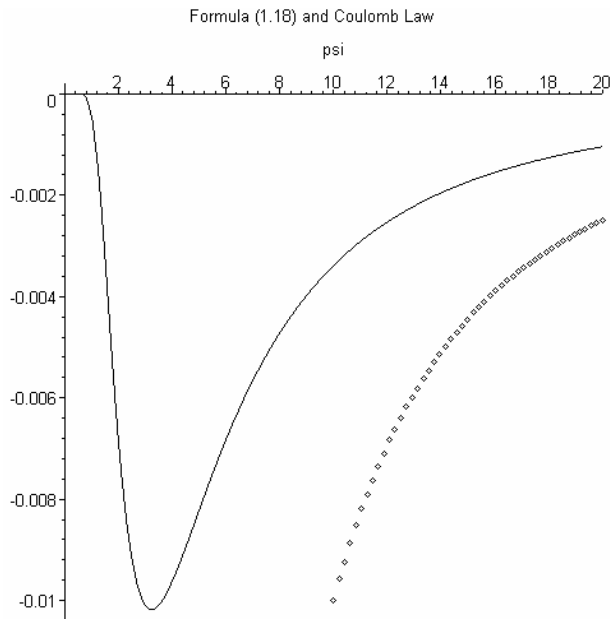


Fig. 1

Se si calcola il lavoro di separazione o di annichilimento di una coppia di cariche, dalla (2.4) si ha²

$$W = \int_0^\infty F \, d\psi = \int_0^\infty \frac{e^2}{\psi^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{R}{\psi}\right) - 1} \left[1 - \frac{R}{\psi} \frac{\exp\left(\frac{R}{\psi}\right)}{\left[\exp\left(\frac{R}{\psi}\right) - 1\right]} \right] d\psi \tag{2.5}$$

e quindi si ha

$$W = \int_0^\infty \frac{e^2}{\psi^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{R}{\psi}\right) - 1} \left[1 - \frac{R}{\psi} \frac{\exp\left(\frac{R}{\psi}\right)}{\left[\exp\left(\frac{R}{\psi}\right) - 1\right]} \right] d\psi = \left[\frac{\frac{e^2}{\psi}}{\exp\left(\frac{R}{\psi}\right) - 1} \right]_0^\infty \tag{2.6}$$

$$\boxed{W = m\bar{C}^2} = KT = \frac{e^2}{R} = \frac{hC}{\lambda} = h\nu^- \tag{2.7}$$

dunque il quanto d'azione elementare di Planck sembra essere un microuniverso finito di assoluta continuità. Poiché la velocità \bar{C} contenuta nella (2.7) può assumere un qualsiasi valore forse possiamo ritenere che i quotidiani processi di emissione e di assorbimento d'energia nei quali siamo immersi sono del tutto simili a quelli delle reazioni nucleari. La luce visibile (e non) che permea tutto l'Universo può essere vista come un processo di annichilimento e produzione di coppie di cariche che riempiono tutto il creato e ciò ricorda il principio di ottica di Huyghens secondo il quale un qualsiasi punto del fronte d'onda può

² Si noti l'uso dell' integrale, sinonimo della più assoluta continuità.

a sua volta essere considerato sorgente di onde sferiche. Forse viviamo in un ambiente in cui la luce può essere vista come una benefica reazione a catena di annichilimento di coppie di elettroni e positroni (o coppie analoghe (neutrini ?). Infatti è interessante in proposito osservare che la famosa equazione di Newton che fornisce la velocità del suono nella materia e cioè la relazione

$$v = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}} \quad (2.8)$$

dove E_Y è il modulo di elasticità del materiale considerato (o tensione) e ρ la sua densità (formula ben nota a Maxwell e tenuta dallo stesso nella massima considerazione !!!) si basa sul concetto di continuità assoluta della materia. Possiamo cioè ingrandire un cubetto di materia ΔV a nostro piacimento ma non riusciremo mai a vedere la natura granulare della materia in esame. E' chiaro che questa presupposta continuità sia della materia che dei campi stessi non esiste. Infatti, ipotizzando l'esistenza degli atomi [3], abbiamo che la (2.8) può essere scritta

$$v = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{2e^2}{\psi^4} \frac{1}{\frac{m}{\psi^3}}} = \sqrt{\frac{2e^2}{m\psi}} \quad (2.9)$$

dove³

$$E_Y = \frac{2e^2}{\psi^4} \quad (2.10)$$

è il modulo di elasticità della materia in esame e

$$\rho = \frac{m}{\psi^3} \quad (2.11)$$

la sua densità. *Nel seguito vedremo una singolare rilettura elettromagnetica delle (2.10) e (2.11).* Dalla (2.9) si vede che si passa da grandezze che esprimono il continuo macroscopico ad una formula che rappresenta la velocità di fuga da un campo elettrico (azione a distanza) esistente a distanze brevi.

E' facile verificare che la (2.9) da valori dello stesso ordine di grandezza di quelli sperimentali per i vari materiali ed anche per i gas [3]. Il ruolo dell'elettrone è veramente fondamentale ! Dunque quella che noi chiamiamo elasticità della materia è riconducibile alla carica dell'elettrone che lega i vari atomi che la costituiscono. Ma se immaginiamo che anche lo spazio vuoto abbia una struttura granulare e sia composto da coppie di positroni ed elettroni (Dirac) ad una distanza media doppia del raggio classico dell'elettrone allora la (2.9) fornisce, per questo particolare suono, proprio la velocità della luce. Ritourneremo tra breve su questo argomento perché questa ipotesi può essere pienamente giustificata.

³ La (2.10) ci consente di determinare con sufficiente approssimazione il modulo di elasticità di un qualsiasi materiale omogeneo. Basta conoscere la distanza ψ tra un atomo e l'altro determinabile con rilievi spettroscopici [3].

Circa una nuova ed ulteriore soluzione del corpo nero, oltre a quella già riportata in [1], c'è da osservare quanto segue. La fig. 2 [4]

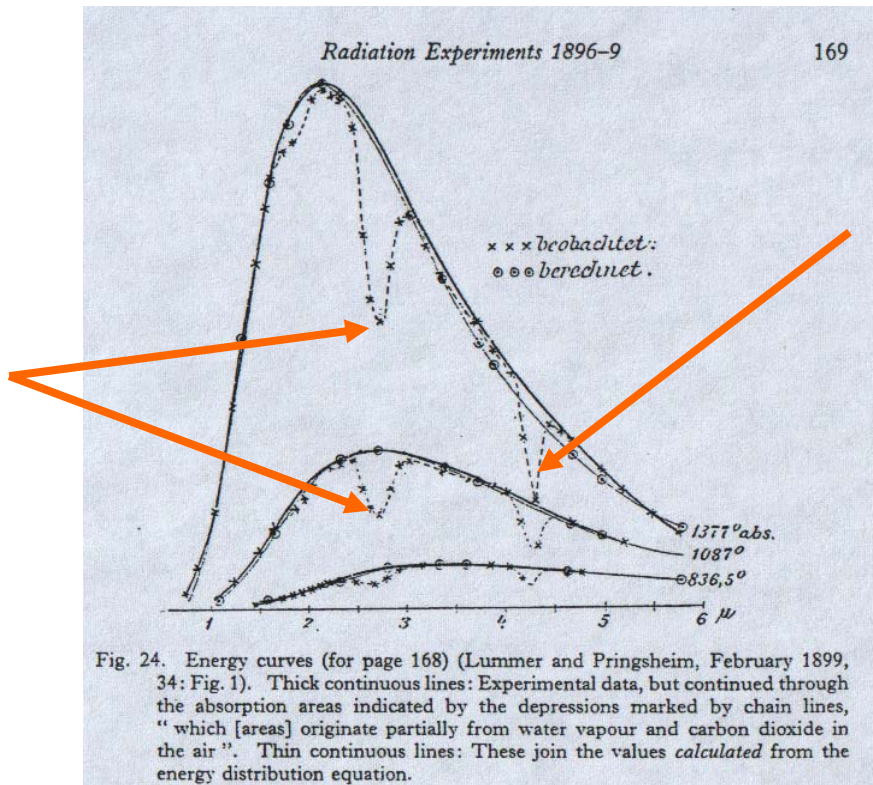
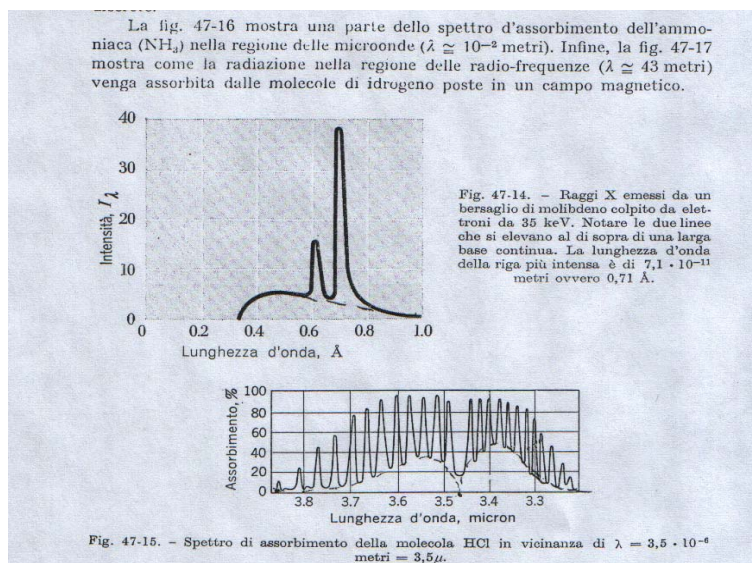


Fig. 2 (xxx osservazioni – ooo calcolo con la formula di Planck)

riporta i rilievi sperimentali del C. N. alle varie temperature. Si osservano delle depressioni (tratteggiate) indicate dalle frecce, che corrispondono alla stessa lunghezza d'onda, al variare della temperatura e che quindi non sono un fatto accidentale. Probabilmente esse rappresentano delle zone di minore emissione (maggiore assorbimento) che non sono affatto rappresentate dalla formula di Planck (curva a tratto continuo) in quanto quest'ultima, così come si vede dalla Fig. 2, rappresenta solo un involucro delle punte sperimentali. Le bande di assorbimento sono ancora più evidenti nella figura seguente [6].



Se invece si studia l'equazione [2]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \delta \left\{ \frac{a}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{1} \sin(1a) \cos(1\Omega t) - \frac{1}{2} \sin(2a) \cos(2\Omega t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} \sin(3a) \cos(3\Omega t) + \frac{1}{3} \sin(3a) \cos(3\Omega t) + \dots \right] \right\} \quad (2.12)$$

con la quale si interpreta la nota ed empirica equazione

$$E = h \nu n \quad (2.13)$$

come una più che classica ma allargata condizione di multirisonanza [2] che si instaura tra un comune oscillatore armonico ed un forzante esterno, e ciò conformemente all'esperimento di cui al filmato riportato nel sito web www.carlosantagata.it, si ha quanto segue. D'altra parte, e per inciso, la (2.13) può essere scritta nella forma

$$E = \hbar \Omega n \rightarrow \frac{E}{\hbar} = \Omega n \rightarrow \omega = \Omega n, \quad (2.14)$$

e quindi se si pensa che ω sia la pulsazione propria dell'oscillatore (dipolo) mentre Ω sia la pulsazione della radiazione elettromagnetica che colpisce la materia, si ha la seguente condizione di multirisonanza

$$\boxed{n = \frac{\omega}{\Omega}}, \quad (2.15)$$

che per $n=1$ coincide con l'unica condizione ad essere da sempre e solamente considerata. Con lo studio dell'equazione (2.12) [2], si ottiene che detto oscillatore, ad un solo grado di libertà, ha innumerevoli picchi di risonanza, anziché uno solo, in corrispondenza dei numeri interi dati dalla relazione (2.15), così come si vede dalla Fig. 2 che segue (per un'accurata esposizione si rimanda all'articolo [2]). La Fig. 3, sull'asse delle ordinate, riporta le ampiezze di risonanza che corrispondono alla condizione espressa dalla (2.15).

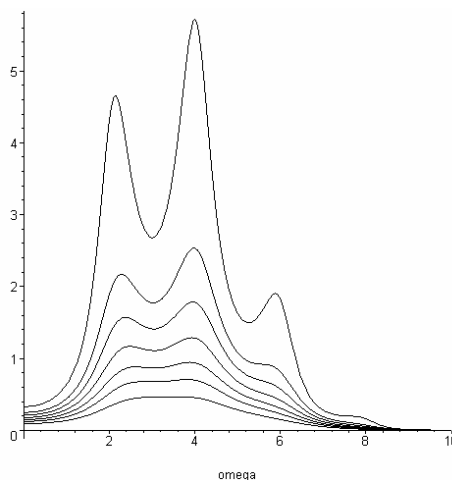


Fig. 3

Se si studia la distribuzione dell'energia della soluzione dell'equazione (2.12) [2], si ha un grafico del tipo di Fig. 4. L'ordinata, questa volta, rappresenta l'energia.

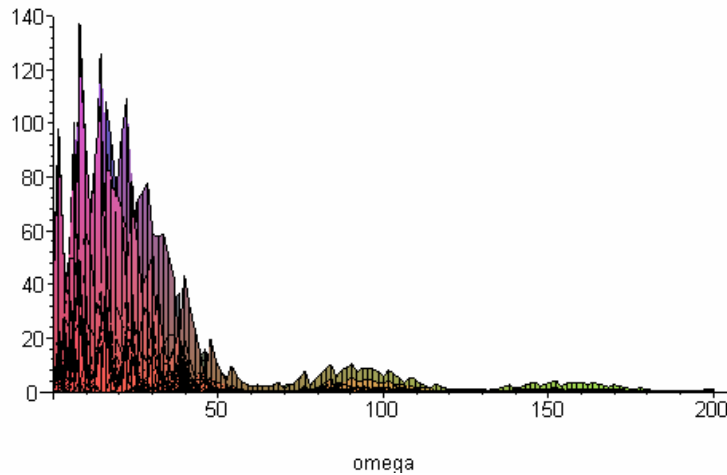
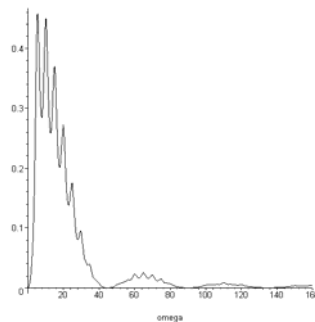
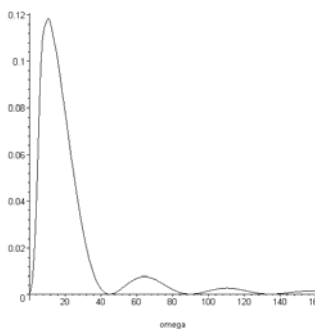


Fig. 4

Come si vede dalla Fig. 4, ci sono dei picchi e degli avvallamenti analoghi a quelli sperimentali di Fig. 2. Dai seguenti grafici [2] si vede inoltre che, man mano che aumenta il termine γ (termine che rappresenta lo smorzamento e che manca del tutto nella soluzione di Planck), si ottengono le figure che seguono dalle quali si evince che con l'aumentare del detto termine i picchi relativi alle varie frequenze di assorbimento tendono a scomparire. Nella seguente figura si ha un valore basso di γ e quindi le punte sono ben evidenti.



Nella figura successiva γ è molto elevato e le punte tendono ad essere schiacciate [2].



E dunque l'equazione sperimentale di Planck rappresenterebbe solo un involuppo dei massimi che si riscontrano nella realtà sperimentale rappresentata nella Fig. 2. E' da osservare che la presenza del detto termine γ evita tutti i susseguenti procedimenti di rinormalizzazione [2]. La rilettura della formula di Planck

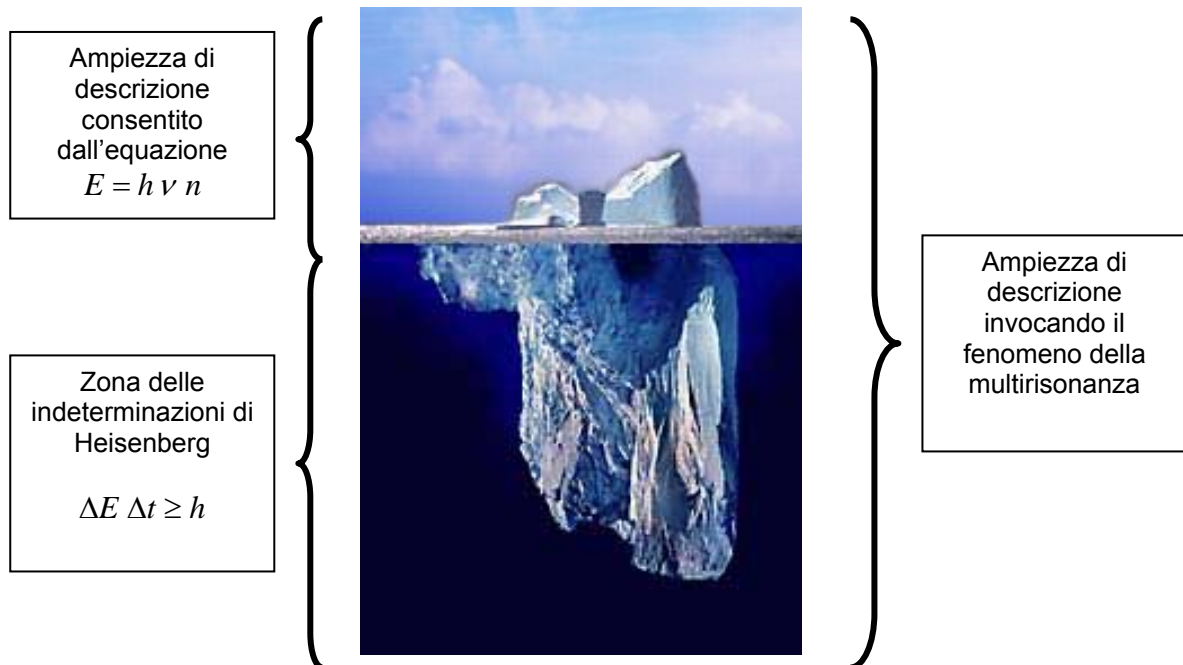
$$E = h \nu n \tag{2.16}$$

secondo la quale essa sarebbe, come già detto, una condizione di risonanza più completa di quella classica (che è stata ed è ancora la sola ad essere riconosciuta da tutta la fisica teorica classica e non) e cioè l'unica condizione di risonanza espressa da

$$\frac{\omega}{\Omega} = 1, \tag{2.17}$$

ha diversi aspetti positivi tra i quali i più salienti sono i seguenti (per maggiori approfondimenti si può consultare l'articolo [2]).

1. Viene esaltato il fondamentale ruolo del fenomeno della risonanza. Con ciò si riconosce finalmente che una qualsiasi forma di energia può essere assorbita, emessa o rifiutata (riflessa) solo a seconda dei vari gradi che assume il fenomeno della risonanza. E si noti che la formulazione del quanto d'energia riguarda appunto il meccanismo con il quale l'onda trasferisce la sua energia al dipolo. Se non si verifica la risonanza l'onda energetica passa inalterata attraverso il sistema, questa volta, non assorbente. Ciò consente un'analisi accurata della riflessione, assorbimento (rifrazione) ed emissione della radiazione elettromagnetica. Invece la sola rilettura della (2.16) come una più estesa condizione di risonanza non basta e non consente uno studio **puntuale** dell'interazione onda-corpuscolo. Il limitarsi a considerare solo le risonanze espresse dalla (2.15) equivarrebbe a voler considerare solo la punta di un iceberg, lasciando alla più pura immaginazione quanto c'è sotto la sua punta (variabili nascoste).



Infatti nel caso classico la risonanza espressa dalla (2.17) è solo uno dei tanti risultati analitici finali della soluzione di una specifica equazione differenziale. Pertanto anche la (2.16), unico e solo punto di appoggio di tutta l'attuale M. Q., se vista come un fenomeno di multirisonanza, deve essere solo uno dei tanti risultati analitici che debbono discendere da un'adeguata equazione differenziale che consente di descrivere compiutamente la detta interazione. Nel seguito mostreremo

che detta equazione già esiste ed è relativa allo studio dell'emissione di un'onda elettromagnetica in un circuito RLC, equazione già lungamente studiata da Planck a proposito del C.N.. (v. Appendice).

2. Finalmente si ha un'interpretazione *fisicamente intuitiva* dei numeri interi. Se il rapporto ω/Ω non fosse un intero non si avrebbe risonanza. Infatti per un rapporto non intero l'azione del forzante contrasterebbe il moto proprio dell'oscillatore. Inoltre le vecchie orbite di Bohr, che incredibilmente non erano oggetto di emissioni elettromagnetiche (come ora non lo sono le configurazioni "stazionarie" dell'equazione di Schrödinger) vengono ad essere, accettando l'idea della risonanza, momenti in cui l'energia dell'onda viene assorbita dalla materia e quindi non vi può essere emissione. Sempre in condizioni di risonanza il corpuscolo oscillante è **costretto** ad assumere (**oscillazioni forzate**) una cinematica **interamente** dettata dall'onda incidente (la particella oscillante diventa un vero e proprio marcatore dell'onda elettromagnetica, tracciando così un esatto ritratto dell'onda che lo comanda) e quindi si comporta conformemente ai moti ondulatori, proprietà che ovviamente perde quando è una particella libera (ciò costituirebbe una rilettura del dualismo onda-corpuscolo ed una interpretazione del Principio⁴ di Complementarietà di Bohr). Va inoltre osservato che la condizione di multirisonanza (2.14) è una condizione temporale e non spaziale come lo sono invece le condizioni di stazionarietà dell'equazione di Schrödinger.

3 - Dal Micro al Macrocosmo e viceversa

Senza fare ipotesi aggiuntive (e quindi tralasciando per il momento la rilettura [2] dell'equazione empirica (2.13) di Planck come una più completa condizione di risonanza classica tra l'onda esterna di pulsazione Ω ed il dipolo atomico di pulsazione propria ω), come abbiamo visto [5], è semplice giungere alla nuova relazione quantistica⁵

$$\lambda = 2 \pi 137 \psi n \tag{3.1}$$

ed è possibile dimostrare come da essa discendano tutti i risultati di Bohr [5]. Ci chiediamo se essa sia valida anche nel macrocosmo e cioè quando produciamo onde elettromagnetiche nello spazio con il noto e fondamentale circuito RLC, rappresentato in Fig. 5 (onde radio).

E l'importanza di questa analisi sarà subito evidente.

⁴ Uno dei tanti e nuovi Principi che la M.Q. ha dovuto escogitare, mancando una interpretazione della formula empirica di Planck (2.16), Principi sempre in perenne contrasto con quelli palpabili e deducibili dal macrocosmo.

⁵ Ma dalla sua lettura non traspare che essa è il risultato di una condizione di risonanza.

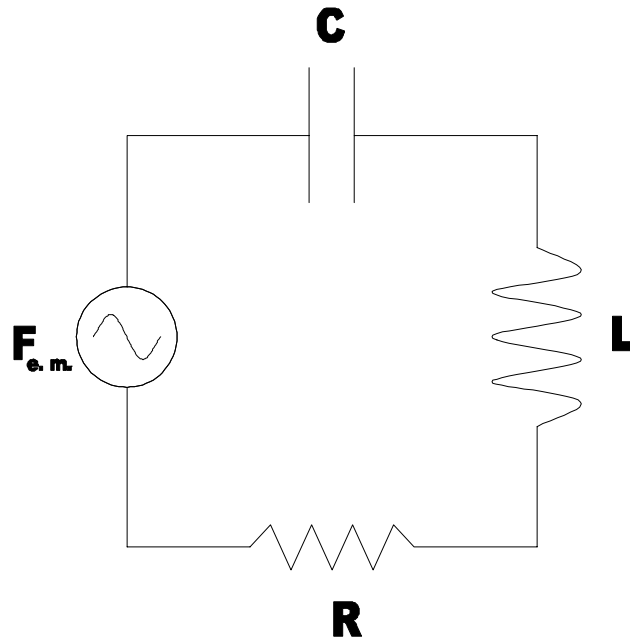


Fig. 5

Al detto circuito è applicata una forza elettromotrice $F_{e.m.}$ (d.d.p.) variabile con pulsazione propria Ω del tipo

$$F_{e.m.} = [F_{e.m.,0}] \cos(\Omega t). \quad (3.2)$$

Per il detto circuito, indicando con q la carica elettrica, si ha la nota equazione⁶

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = [F_{e.m.,0}] \cos(\Omega t), \quad (3.3)$$

dove L, R e C sono rispettivamente l'induttanza, la resistenza e la capacità del circuito rappresentato in fig. 4. La (3.3), si può anche scrivere

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{1}{L} [F_{e.m.,0}] \cos(\Omega t). \quad (3.4)$$

Si vede allora dalla (3.4) che la corrente del detto circuito ha una pulsazione propria data dalla relazione

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.5)$$

e si ha risonanza (con quel tipo di forzante) **solo** quando

$$\omega = \Omega \times [1]. \quad (3.6)$$

⁶ Questa è l'equazione di cui si parlava al punto 1 del paragrafo precedente. Occorrerebbe applicare ad essa solo un forzante di tipo impulsivo di cui all'equazione (2.12), conformemente all'esperimento di cui al filmato già detto, per ottenere la multirisonanza. Questa è l'equazione lungamente studiata da Planck per risolvere il Problema del Corpo Nero (v. Appendice).

Remark

Sempre a proposito della multirisonanza riportiamo in sintesi quanto estesamente trattato nell'articolo [2]. Come già osservato [2], sia t il periodo di oscillazione proprio del circuito in esame (pendolo). Se il forzante esterno applica al circuito una serie indefinita di impulsi e questi micro impulsi sono separati da un tempo pari a T è allora immediato verificare che il fenomeno della risonanza si verifica anche quando

$$T = t n \quad n \in [1, 2, 3..] \quad (3.7)$$

e cioè anche e solo quando l'impulso viene applicato al circuito con un intervallo di tempo tale che (3.7) sia pienamente soddisfatta. La Fig. 6 mostra che gli impulsi applicati sono separati dal tempo T , pari a $t n$ (caratteristica temporale).

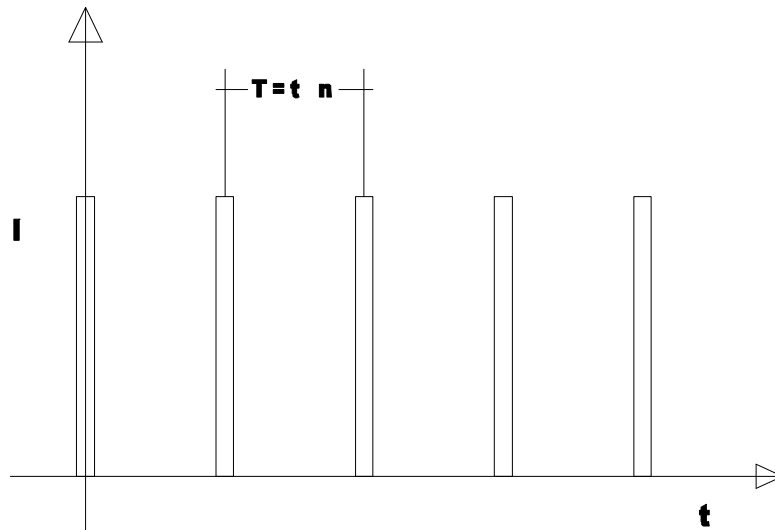


Fig. 6

La (3.7) può essere scritta

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{t n} \rightarrow \omega = \Omega n \quad n \in [1, 2, 3..] \quad (3.8)$$

che si identifica con la nota relazione empirica di Planck quando ambo i membri si moltiplicano per \hbar . Ciò comporta che la (3.4), con un opportuno forzante che soddisfi la (3.8) (v. (2.12)), consente [2] uno studio accuratissimo ed insperato dell'interazione onda materia, evitando di limitarsi al solo esame della punta dell'iceberg.

Ritornando alla (3.4), la sua soluzione com'è noto è⁷

⁷ E. Perucca **Fisica Generale e Sperimentale** UTET V. II, Tomo II pag. 967 e seg.

$$q = \frac{F_{e.m.,0}}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L \Omega^2\right)^2 + R^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \varepsilon + \pi) \quad (3.9)$$

con

$$\tan \varepsilon = -\frac{R}{\frac{1}{C} - L \Omega^2}. \quad (3.10)$$

Nel momento in cui si verifica la risonanza si ha la massima carica stazionaria nel circuito. Questo stato è caratterizzato dalla condizione

$$\left(\frac{1}{C} - L \Omega^2\right) = 0 \quad (3.11)$$

e quindi da essa è possibile calcolare la frequenza della radiazione elettromagnetica emessa dal circuito che risulta essere

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (3.12)$$

La carica stazionaria nel circuito, in condizioni di risonanza, sarà allora

$$q_{\max} = \frac{F_{e.m.,0}}{R \Omega}. \quad (3.13)$$

Come già anticipato, vogliamo mostrare come, anche in un circuito (macroscopico?) siffatto sia possibile giungere alla relazione

$$\lambda = 2\pi \frac{C_l}{\nu} \psi \left(\times \boxed{1}\right) \quad (3.14)$$

avendo indicato con C_l la velocità della luce e con ν la velocità media della carica oscillante con ampiezza ψ , formula che nel caso specifico dell'atomo di idrogeno si specializza nella relazione ($C_l / \nu = 137$)

$$\lambda = 2 \pi 137 \psi \left(\times \boxed{1}\right). \quad (3.15)$$

Per fare ciò, e se ne vedrà il motivo, utilizzeremo il vecchio sistema c.g.s.. Avremo modo di rivedere come grandezze elettromagnetiche quali R, L, C ed V (d.d.p.) abbiano delle interessanti, suggestive e biunivoche corrispondenze, nel citato sistema, con grandezze puramente meccaniche quali lunghezze, velocità ed accelerazioni, fatto già noto ma caduto in disuso con l'avvento dei nuovi sistemi di misura. Inizieremo col porre (questa è la posizione che comporta delle novità che risulteranno subito evidenti)

$$V = F_{e.m.,0} = \frac{q_0}{\psi}. \quad (3.16)$$

Notiamo che se poniamo $q_0 = e$, dove e è la carica dell'elettrone, e moltiplichiamo ambo i membri per e , la (3.16) diventa

$$Ve = \frac{e^2}{\psi} \tag{3.17}$$

Possiamo, al solito, scrivere

$$Ve = \frac{e^2}{\psi} = \frac{2\pi 137 e^2}{2\pi 137 \psi} = \frac{hC_l}{\lambda} = h\nu \tag{3.18}$$

e questo è l'effetto fotoelettrico, resistente a qualsiasi interpretazione classica.

Più precisamente la (3.16) andrebbe scritta (d.d.p.)

$$\Delta V = F_{e.m.,0} = \frac{q_0}{\psi_2} - \frac{q_0}{\psi_1} = \frac{q_0}{\psi} - \frac{q_0}{\psi_0} \tag{3.19}$$

dalla quale analogamente ed immediatamente si ha la ben nota relazione quantistica di Einstein dell'effetto fotoelettrico, ininterpretabile (si diceva e si dice ancora) secondo i classici concetti

$$E = \Delta Ve = \frac{e^2}{\psi} - \frac{e^2}{\psi_0} = \frac{2\pi 137 e^2}{2\pi 137 \psi} - W_0 = E = h\nu - W_0 \tag{3.20}$$

Ecco perché dovremmo attenderci delle consistenti novità dalla posizione (3.16). E' evidente che se nel seguito assumeremo la (3.16) è perché poniamo nella (3.19) $\psi_0 = \infty$, il che equivale ad un totale lavoro di estrazione dell'elettrone. Possiamo dunque dire che la posizione (3.16) è del tutto sicura ed affidabile, e tali dovrebbero essere le sue conseguenze.

Dunque scriveremo la (3.3) nella seguente maniera

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \left(\frac{q_0}{\psi} - E_0 \right) \cos(\Omega t), \tag{3.21}$$

assumendo, nel seguito, $E_0 = 0$. La (3.21) ci consente di avere le seguenti equazioni dimensionali (che, come vedremo, sono molto di più di semplici equazioni dimensionali).

1. Dalla (3.21) si ha che

$$\frac{q}{C} = \frac{q_0}{\psi} \rightarrow C = \overline{\psi} \equiv [cm.]. \tag{3.22}$$

Da essa si vede subito che si ritrova l'effetto fotoelettrico e quindi la capacità C si identifica esattamente con la lunghezza $\overline{\psi}$.

Che la (3.22) esprima il fatto che, nel sistema C.G.S._{es}, una capacità abbia le dimensioni di una lunghezza è già noto [6, pag. 664]. Qui aggiungiamo che questa

lunghezza ψ (ampiezza di vibrazione) moltiplicata per $(2\pi 137)$ ci da proprio la lunghezza dell'onda elettromagnetica (v. formula (3.20). Invece nel sistema m.k.s. la capacità si misura in Farad ($1F = 2.998 \times 10^{11} cm.$).

2. La seconda equazione, sempre dedotta dalla (3.21), riguarda il termine con la resistenza R e si ha

$$R \frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{\psi} \rightarrow R = \frac{1}{v} \equiv \left[\frac{1}{\frac{cm}{sec}} \right]. \quad (3.23)$$

Dunque la resistenza R, nel sistema C.G.S._{es}, viene misurata dall'inverso di una velocità. Nel sistema m.k.s. la resistenza si misura in Ohm ($1\Omega = 1/C_l$), avendo indicato con C_l la velocità della luce. Anche questo fatto è già noto [5, pag. 664]. Invece noi, come vedremo in seguito, saremo portati ad identificare questa velocità con quella della particella che trasporta la carica.

3. La terza riguarda l'induttanza L, **termine ricollegabile esclusivamente al campo magnetico B**, infatti è noto che

$$\Phi_B = L \frac{dq}{dt} = L i, \quad (3.24)$$

tenuto conto anche che

$$B = \frac{\Phi_B}{A} \quad (3.25)$$

si ha

$$B = \frac{L}{A} i, \quad (3.26)$$

avendo indicato con Φ_B il flusso magnetico concatenato con il circuito. Dalla (3.21) si deduce che

$$L \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q_0}{\psi} \rightarrow L \frac{q}{T^2} = \frac{q_0}{\psi} \rightarrow L = \frac{1}{\frac{\psi}{T^2}} = \frac{1}{\frac{d^2\psi}{dt^2}} \equiv \left[\frac{1}{\frac{cm}{sec^2}} \right]. \quad (3.27)$$

Dunque l'induttanza è l'inverso dell'accelerazione della carica oscillante. Questo risultato si può ottenere anche dalla legge di Faraday, quando si tenga conto della posizione (3.16), che interpreta l'effetto fotoelettrico. Infatti in tal caso la f.e.m. indotta si può scrivere

$$V = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2} = V = \frac{q}{\psi}. \quad (3.28)$$

Da questa relazione si ottiene ancora

$$L = -\frac{1}{\frac{d^2\psi}{dt^2}}. \quad (3.29)$$

Si può dunque concludere che nel sistema c.g.s. la capacità **C** si misura con l'unità di lunghezza, la resistenza è l'inverso di una velocità. Quest'ultimo fatto è anche fisicamente accettabile. Una sostanza che viene attraversata da una carica con grande velocità offre una scarsa resistenza. L'induttanza **L**, che, sempre nello stesso sistema C.G.S.es, ha le dimensioni $[l^{-1}t^2]$ e viene misurata in *stat H*, **viene ad identificarsi con l'inverso dell'accelerazione del quid che porta la carica**. Questo risultato può anche, dimensionalmente, ricavarsi dalla definizione stessa dell'induttanza L di un solenoide. Infatti per esso, com'è noto, si ha

$$L = \mu_0 n^2 l A \tag{3.30}$$

dove, nel sistema c.g.s., $\mu_0 = 4\pi / C_l^2$, n è il numero di spire per unità di lunghezza l del solenoide ed A è la sezione trasversale dello stesso. Pertanto si ha

$$L \equiv \left[\frac{4\pi N^2}{C_l^2} l A \right] \equiv \left[4\pi N^2 \frac{l}{C_l^2} \right] \equiv \left[\frac{4\pi N^2}{\frac{l}{T^2}} \right]. \tag{3.31}$$

Ciò detto, dalla (3.13) segue che nel circuito si avrà la massima carica stazionaria **in condizione di risonanza** quando

$$q_{\max} = \frac{F_{e.m.,0}}{R \Omega} = \frac{1}{R \Omega} \frac{q_0}{\psi} = \frac{q_0}{R 2 \pi \nu \psi} = \frac{q_0 \lambda}{2 \pi R C_l \bar{\psi}} \tag{3.32}$$

e quindi

$$\boxed{\lambda = \left(\frac{q_{\max}}{q_0} \right) 2 \pi R C_l \bar{\psi}}. \tag{3.33}$$

Siamo così giunti, anche per il circuito RLC, ad una relazione perfettamente generalizzata della (3.1). Anche da questa formula si vede che, per correttezza dimensionale, la resistenza **R** deve essere l'inverso di una velocità. Se questa velocità si identifica proprio con quella della particella (coefficiente di omogeneizzazione pari ad 1) possiamo scrivere (avendo indicato momentaneamente con C_l la velocità della luce)

$$\lambda = \left(\frac{q_{\max}}{q_0} \right) 2 \pi R C_l \bar{\psi} = \left(\frac{q_{\max}}{q_0} \right) 2 \pi \frac{C_l}{\nu} \bar{\psi} [\times 1]. \tag{3.34}$$

Dunque anche nel macrocosmo è valida la relazione (3.1), con l'unità al posto di **n**. Varrà un'analogia identità anche per l'induzione L ? E se ciò è quali ripercussioni si avranno nelle equazioni di Maxwell ?

Nel caso particolare dell'atomo di idrogeno abbiamo già visto che (data l'unicità della carica)

$$\lambda = 2 \pi \frac{C_l}{\nu} \bar{\psi} = 2 \pi 137 \bar{\psi} \tag{3.35}$$

e sottolineiamo ancora una volta che la (3.35) discende da una **condizione di risonanza temporale**. Possiamo concludere che se applichiamo al detto circuito oscillante un forzante del tipo (2.12) dalla soluzione dell'equazione differenziale così ottenuta [2] discende, in particolare, che

$$\lambda = 2 \pi \frac{C_l \bar{\psi}}{v} n . \quad (3.36)$$

Possiamo calcolare per il circuito macroscopico RCL l'ampiezza media $\bar{\psi}$ di risonanza della carica oscillante. Sappiamo che la frequenza di risonanza è pari a

$$v_{ris} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3.37)$$

e che, per la (3.33), la lunghezza d'onda elettromagnetica di risonanza stazionaria è pari a

$$\lambda_{staz.} = \left(\frac{q_{max}}{q_0} \right) 2 \pi R C_l \bar{\psi} . \quad (3.38)$$

Da queste due ultime relazioni segue che

$$\bar{\psi} = \left(\frac{q_{max}}{q_0} \right) \frac{\sqrt{CL}}{R} . \quad (3.39)$$

Anche questa volta sembra opportuno sottolineare la fondamentale presenza della resistenza **R** che consente di determinare l'altrimenti indeterminabile ampiezza di vibrazione della carica (se non affidandosi a considerazioni statistiche), infatti, per $R=0$, $\bar{\psi}$ è indeterminata. Rileviamo dunque che anche nella realtà *macroscopica*⁸ è valida la relazione generale

$$\lambda_{staz.} = \left(\frac{q_{max}}{q_0} \right) 2 \pi \frac{C_l}{v} \bar{\psi} n \quad (3.40)$$

alla quale occorre aggiungere un **n** quando si considera il particolare forzante dell'equazione (2.12). Quanto dedotto può essere evidentemente traslato in gravità per un dipolo (M + m) o nello studio dell'interazione onda-nucleo atomico.

4 - Questioni dimensionali ?

Sempre facendo riferimento al circuito RCL considerato, sappiamo che l'energia accumulata dal condensatore C è data

$$E_{elettrica} = \frac{1}{2} CV^2 . \quad (4.1)$$

⁸ Questo è un termine improprio. In effetti siamo immersi in un mondo che è congiuntamente macro e microscopico.

Per le posizioni in precedenza assunte abbiamo

$$E_{elettrica} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \psi \left(\frac{q}{\psi} \right)^2 = \frac{1}{2} \psi \left(\frac{Ne}{\psi} \right)^2 = \frac{1}{2} N^2 \frac{e^2}{\psi} = \frac{1}{2} N^2 h \nu, \quad (4.2)$$

Se allora ci riferiamo ad una sola carica accumulata abbiamo che quando il condensatore si scarica si ha l'emissione di un mezzo fotone.

Analogamente per un solenoide si ha

$$E_{magnetica} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{d^2\psi}{dt^2}} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\psi}{T^2}} \left(\frac{Ne}{T} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{N^2 e^2}{\psi} = \frac{1}{2} N^2 \frac{e^2}{\psi} = \frac{1}{2} N^2 h \nu. \quad (4.3)$$

In un circuito **C L**, cioè privo di resistenza, l'energia, passando alternativamente dal condensatore alla bobina, si conserva (pendolo privo di attrito). Pertanto si ha

$$E_{tot} = E_{elettrica} + E_{magnetica} = N^2 h \nu. \quad (4.4)$$

Occorre osservare che se si usano le normali definizioni di C ed L e cioè

$$C = \epsilon_0 \frac{A_C}{d_C} \quad e \quad L = \mu_0 n^2 l_L A_L \quad (4.5)$$

comunque si perviene alle relazioni

$$E_{el.} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{A_C}{d_C} \right) \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0\psi} \right)^2 = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} (l_C) \frac{q^2}{\psi^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{l_C}{4\pi\psi} \right) N^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\psi} \quad (4.6)$$

e

$$\begin{aligned} E_m. &= \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 l_L A_L \left(\frac{q}{T} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l^2} l_L A_L \frac{\bar{N}^2 e^2}{T^2} = \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 N^2 \frac{A_L}{l^2} \frac{l_L}{l_L} \frac{\bar{N}^2 e^2}{T^2} = \frac{1}{2} \mu_0 N^2 \frac{A_L}{l^2} \frac{l_L}{T^2} \frac{\bar{N}^2 e^2}{l_L} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 \bar{N}^2 A_L}{l^2} \frac{e^2}{l_L} \end{aligned} \quad (4.7)$$

da cui si ha

$$E_m. = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{N^2 \bar{N}^2 A_L}{l^2} \right)^{-2} \frac{e^2}{l_L} = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\bar{M} \right)^{-2} \frac{e^2}{l_L} = \frac{4\pi}{2} \mu_0 \epsilon_0 v^{-2} \left(\bar{M} \right) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l_L} \dots \quad (4.8)$$

Si nota però l'artificiosità dei passaggi in quest'ultimo caso se paragonati con l'immediatezza deduttiva delle (4.2) e (4.3). Ed a proposito di questioni dimensionali il nostro E. Perucca, **in merito all'identità (3.18)**, argutamente dice (Fisica Generale e Sperimentale Vol. II Tomo II § 494 Quanti di luce (fotoni) UTET) *Ma, dimensionalmente, non troviamo argomento per ricordare né oscillazioni né onda.*

Va inoltre sottolineato il fatto, meglio evidenziato nel seguente paragrafo, che sia l'energia del condensatore (campo elettrico) che quella relativa all'induttanza (campo magnetico) si riducono entrambe ad un'unica energia che è quella elettrica, energia che, tra l'altro, coincide con un multiplo del quanto di Planck.

5 - L'equivalenza tra l'atomo di idrogeno ed un comune circuito RLC

Abbiamo visto che anche per un circuito (*macroscopico*) vale una relazione del tipo

$$\lambda_{staz.} = \left(\frac{q_{max}}{q_0} \right) 2 \pi \frac{C_l}{v} \psi \tag{5.1}$$

e vogliamo mostrare adesso come un atomo di idrogeno possa essere assimilato ad un microscopico circuito **RLC in condizioni di risonanza temporale**.

Sappiamo che la frequenza della radiazione elettromagnetica emessa da un dipolo (atomo) coincide con quella del dipolo stesso. Quest'ultima **viene da sempre calcolata uguagliando la forza centrifuga con quella centripeta**. Nel caso dell'atomo di idrogeno infatti si ha (sistema c.g.s.)

$$\frac{m v^2}{\psi} = \frac{e^2}{\psi^2} \tag{5.2}$$

da cui segue che la frequenza è

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4 \pi^2 m \psi^3}} \tag{5.3}$$

Consideriamo adesso l'atomo di idrogeno alla stregua di un normale circuito **RCL**. Abbiamo ((3.37)) che (si noti la condizione di risonanza espressa dalla (5.4))

$$v_{ris} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 L C}} \tag{5.4}$$

Avendo definito

$$\boxed{L = \frac{1}{\frac{d^2\psi}{dt^2}} \quad e \quad C = \psi}, \tag{5.5}$$

dove, come già detto, ψ rappresenta l'ampiezza media di vibrazione della carica, dalla (5.4) si ha immediatamente

$$v_{ris} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 L C}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 \frac{1}{\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)} \psi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 \frac{\psi}{\left(\frac{e^2}{m\psi^2}\right)}}} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi^2 m\psi^3}} \tag{5.6}$$

Il fatto che, attraverso l'induttanza magnetica riusciamo, come meglio tra poco vedremo, a dedurre il campo elettrico esistente sull'elettrone, campo elettrico che è il solo ad essere considerato da Bohr, dal quale poi successivamente deduce il magnetone così come precisato in appresso, merita un approfondimento. Newton e Bohr ci hanno abituati a dare priorità ai campi coulombiani o centrali. Normalmente ammettiamo cioè che (sia nel caso dell'elettrone che della Luna) sul corpo orbitante agisce una forza centripeta esattamente uguale a quella centrifuga. Sarebbe forse il caso di chiederci perché questo corpo, invece di muoversi di moto rettilineo ed uniforme, in ossequio al 1° Principio della Dinamica, in quanto su di esso agiscono forze che si fanno *continuamente* ed esattamente equilibrio, continua invece a percorrere una circonferenza. Nel caso dell'elettrone possiamo rimuovere questa critica invocando l'ineludibile presenza dell'induzione magnetica (5.5) che notoriamente deflette una carica in movimento.

Infatti, nel caso dell'elettrone dell'atomo di idrogeno, abbiamo che il campo di induzione magnetica è dato da

$$B = \frac{L}{A} i = \frac{1}{\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right) \pi \psi^2} \frac{e}{T} = \frac{1}{\left(\frac{e^2}{m \psi^2}\right) \pi \psi^2} \left[\frac{e}{T}\right] = \frac{m}{\pi e} \left[\sqrt{\frac{e^2}{4\pi^2 m \psi^3}}\right] = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}. \quad (5.7)$$

La forza che esercita tale campo magnetico sull'elettrone in moto circolare intorno al protone è

$$F_{magnetica} = i l [B] = e \left(\frac{2\pi\psi}{T}\right) \left[\frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}\right] = e \left(\sqrt{\frac{e^2}{m \psi}}\right) \left[\frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}\right] = \frac{1}{2\pi^2} \frac{e^2}{\psi^2}. \quad (5.8)$$

Dunque il rapporto tra la forza elettrica e quella magnetica deviante e concorde alla precedente, è pari a

$$\boxed{\boxed{\frac{F_{elettrica}}{2\pi^2 F_{magnetica}} = 1}}. \quad (5.9)$$

Se si definisce che il campo di induzione magnetica è pari a $\bar{B} = 2\pi^2 B$ allora possiamo affermare che sull'elettrone di Bohr agisce un campo magnetico che genera sulla detta particella orbitante una forza deflettente perfettamente equivalente a quella che chiamiamo forza coulombiana.

Si fa dunque avanti l'idea che l'onda elettromagnetica è il risultato di un solo campo che appare elettrico o magnetico a seconda dello strumento di indagine. Ovviamente se si da priorità al campo magnetico si ha che la particella è deviata in un senso o nell'altro. Analogamente, se si pensa ad un campo elettrico, si ha un'attrazione o repulsione.

In altri termini possiamo dire che la Forza di Lorentz sull'elettrone dell'atomo di idrogeno, che è data da

$$\bar{F} = q \bar{v} \wedge \bar{B} = q \frac{2\pi\psi}{T} \wedge \bar{B} = i \oint d\bar{\psi} \wedge \bar{B} \quad (5.10)$$

coincide esattamente con la forza di Coulomb e cioè

$$q v B = \frac{e^2}{\psi^2}. \quad (5.11)$$

Infatti, se pensiamo che il vettore \vec{B} sia ortogonale al piano dell'orbita dell'elettrone intorno al nucleo ed il suo valore sia dato, come detto⁹, da

$$|\vec{B}| = \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}, \quad (5.12)$$

abbiamo che la Forza di Lorentz sull'elettrone è

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = e \sqrt{\frac{e^2}{m\psi}} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} = \frac{e^2}{\psi^2}. \quad (5.13)$$

Occorre inoltre osservare che è noto che il rapporto E/B coincide con la velocità della luce. Nel caso in esame (atomo di idrogeno) si ha (c.g.s.)

$$\frac{E}{B} = \frac{\frac{e}{\psi^2}}{\sqrt{\frac{m}{\psi^3}}} = \sqrt{\frac{e^2}{m\psi}} = v \quad (5.14)$$

velocità che è pari a quella della luce quando ψ coincide col raggio classico dell'elettrone. Nel caso che ψ coincide col raggio di Bohr detta velocità è pari a quella dell'elettrone sulla detta orbita e cioè $C/137$ (si potrebbe pensare ad una luce rifratta).

Per ultimo calcoliamo il magnetone di Bohr (nel sistema C.G.S._{es} ha le dimensioni $[\sqrt{l^3/m}]$ e cioè è esattamente l'inverso della definizione di B . In proposito si può consultare la Tabella riportata in Appendice). Premettiamo prima la sua classica determinazione.

E' noto che, dopo aver quantizzato il moto dell'elettrone immerso nel solo campo elettrico, Bohr, in analogia con l'elettrologia classica, pone

$$\mu = A i. \quad (5.15)$$

Allora, ricordando che con Bohr si ha

$$v = \frac{C}{137 n} \quad (5.16)$$

abbiamo

$$\mu = A i = \frac{\pi \psi^2 e}{T} = \frac{2\pi \psi^2 e}{2T} = \frac{1}{2} e \psi v = \frac{1}{2} e \psi \frac{C}{137 n}, \quad (5.17)$$

e tenuto conto che il raggio di Bohr è dato da

⁹ Si noti che la sua espressione analitica coincide, anche questa volta, con la formula dimensionale (v. Tabella in Appendice).

$$\psi = \frac{e^2}{mC^2} 137^2 n^2 \quad (5.18)$$

si ha anche

$$\mu = \frac{1}{2} e \psi \frac{C}{137 n} = \frac{1}{2} \frac{e^3}{mC} 137 n = \frac{1}{2} e \frac{2\pi e^2 137}{2\pi mC} n = \frac{1}{2} e \frac{hC}{2\pi mC} n = \frac{1}{2} \frac{e \hbar}{m} n, \quad (5.19)$$

e dunque il magnetone elementare di Bohr (o momento magnetico elementare¹⁰) è pari a

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{e \hbar}{m}. \quad (5.20)$$

Anche dalla (5.7), che va riscritta

$$B = 2\pi^2 \frac{L}{A} i, \quad (5.21)$$

è possibile ottenere la (5.20). Infatti tenuto conto che dalla (5.15) si ha

$$A = \frac{\mu}{i}, \quad (5.22)$$

dalla (5.21), introducendo in essa la (5.22), si ottiene

$$\mu = 2\pi^2 \frac{L}{B} i^2 = \frac{2\pi^2}{\frac{d^2\psi}{dt^2} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}} \frac{e^2}{T^2} = \frac{2\pi^2}{\frac{e^2}{m\psi^2} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}} \frac{e^2}{T^2} = \frac{m\psi^2}{\sqrt{\psi^3}} \frac{2\pi^2}{T^2} = \frac{m\psi^2}{\sqrt{\psi^3}} \frac{2\pi^2 e^2}{4\pi^2 m\psi^3} \quad (5.23)$$

e quindi

$$\mu = \frac{m\psi^2}{\sqrt{\psi^3}} \frac{2\pi^2 e^2}{4\pi^2 m\psi^3} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{\psi^3}}} \frac{e^2}{2\psi} = \frac{e^2}{2\psi \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}} = \frac{e^2}{2\sqrt{\frac{m}{\psi}}} \quad (5.24)$$

$$\mu = \frac{e^2}{2\sqrt{\frac{m}{\psi}}} = \frac{1}{2} e^2 \sqrt{\frac{\psi}{m}} = \frac{1}{2} e^2 \sqrt{\frac{1}{m} \frac{e^2}{mC^2} 137^2} = \frac{1}{2} e \frac{e^2 137}{mC} = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m} e. \quad (5.25)$$

Allora, ed analogamente, potremmo dire che la (5.12), nel caso dell'atomo di idrogeno, rappresenterebbe il **campo magnetico elementare**. E' il caso di osservare che nel caso dell'atomo di idrogeno si ha

$$E = \frac{e}{\psi_{Bohr}^2} = \frac{4.8 \times 10^{-10}}{(5.29 \times 10^{-9})^2} = 1.715 \times 10^7 \text{ [dyne / Franklin]} \quad (5.26)$$

¹⁰ $\mu = \frac{1}{2} e v \psi = \frac{1}{2} e \frac{C}{137} \frac{e^2}{mC^2} 137^2 = \frac{1}{2} e \frac{e^2 137}{mC} = \frac{1}{2} e \frac{\hbar C}{mC} = \frac{1}{2} e \frac{\hbar}{m}.$

e

$$B = \sqrt{\frac{m}{\psi_{Bohr}^3}} = \sqrt{\frac{9.1 \times 10^{-28}}{(5.29 \times 10^{-9})^3}} = 0.0784 \text{ [stat T]} \quad (5.27)$$

e quindi (formula (5.14))

$$\frac{E}{B} = \frac{1.715 \times 10^7}{0.0784} = 2.187 \times 10^8 = \frac{C}{137} = v \quad (5.28)$$

e si è portati a scrivere anche che

$$v = \frac{E}{B} = \frac{C}{137 n} . \quad (5.29)$$

Dalla (5.29) si ha subito, nel caso dell'atomo di idrogeno, che l'energia è data da

$$W = \frac{1}{2} m \left(\frac{E}{B} \right)^2 = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{137^2 n^2} \quad (5.30)$$

che coincide con l'energia di Bohr.

Nel sistema MKSA la (5.26) si scrive

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{\psi_{Bohr}^2} = \frac{1}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} \frac{1.60 \times 10^{-19}}{(5.29 \times 10^{-11})^2} = 5.14 \times 10^{11} \text{ [Volt / m]} . \quad (5.31)$$

Questo valore si ottiene anche

$$E = \frac{e}{\psi_{Bohr}^2} = 1.715 \times 10^7 \times 3 \times 10^4 = 5.14 \times 10^{11} . \quad (5.32)$$

L'induzione magnetica B va moltiplicata per 3×10^6 . Infatti si ha

$$B = \sqrt{\frac{m}{\psi_{Bohr}^3}} = \sqrt{\frac{9.1 \times 10^{-28}}{(5.29 \times 10^{-9})^3}} = 0.0784 \times 3 \times 10^6 = 235200 \text{ [weber / m}^2 = \text{Tesla]} \quad (5.33)$$

e quindi

$$\frac{E}{B} = \frac{5.14 \times 10^{11}}{2.352 \times 10^5} = 2.185 \times 10^6 = \frac{C}{137} = \frac{2.998 \times 10^8}{137} \quad (5.34)$$

Si passa dal Franklin al Coulomb [MKSA]

$$4.8 \times 10^{-10} \text{ Fr} \times \frac{10^{-9}}{3} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Coulomb} . \quad (5.35)$$

In base a tutto quanto detto in precedenza, si è visto che le relazioni dimensionali delle varie grandezze fisiche, nel sistema c.g.s.Stat (1^a colonna della tabella in appendice),

coincidono con le formule delle grandezze stesse. Pertanto la massa magnetica, che ha le dimensioni $[m^{1/2} l^{1/2}]$, viene data dalla formula

$$\mathcal{K} = \sqrt{m \psi} . \tag{5.36}$$

D'altra parte il campo magnetico può, analogamente al campo elettrico, essere definito dal rapporto tra una carica magnetica ed il quadrato della distanza e cioè

$$B = \frac{\mathcal{K}}{\psi^2} . \tag{5.37}$$

Avendo stabilito che il campo magnetico è dato dalla relazione

$$B = \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} \tag{5.38}$$

si ha anche che

$$B = \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} = \sqrt{\frac{m\psi}{\psi^4}} = \frac{\sqrt{m\psi}}{\psi^2} = \frac{\mathcal{K}}{\psi^2} . \tag{5.39}$$

Sempre nel caso dell'atomo di idrogeno si ha quindi la massa magnetica quantizzata

$$\mathcal{K}_n = \pm \sqrt{m \psi} = \pm \sqrt{m \frac{e^2}{mC^2} 137^2 n^2} = \pm \frac{e}{C} 137 n = \pm \frac{\hbar}{e} n . \tag{5.40}$$

6 - La Gravità come fenomeno di Mutua Induzione Magnetica ?

L'idea non è nuova. Già Maxwell pensava a qualcosa del genere. P.M. Harman nel suo scritto **The Natural Philosophy of J. C. Maxwell** (Cambridge) in proposito afferma (pag. 173, 174 e 175):

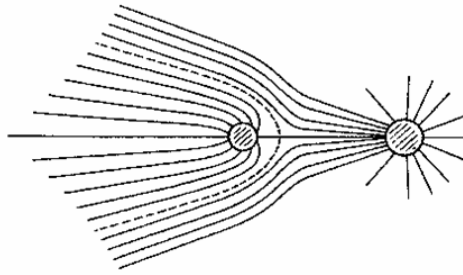
The terms 'vis viva' and 'tension' were used by John Tyndall, as renditions of Helmholtz's terms *lebendige Kraft* and *Spannkraft*, in his 1853 translation of Helmholtz's memoir *Über die Erhaltung der Kraft* of 1847 (and correspond to 'kinetic' and 'potential' energy); while the expression 'the law of the conservation of energy' had been first used by Rankine in 1853. Maxwell was employing terms of recent provenance.

He explains the distinction between 'force' and 'energy': ' Force is the tendency of a body to pass from one place to another', while 'Energy is the power a thing has of doing work'. Energy is a conserved quality, so that in the explanation of gravity by the theory of lines force, outlined so suggestively by Faraday

We have conservation of energy ... and besides this we have a conservation of 'line of force' as to their *number* and total strength for *every* body always sends out a number proportional to its own mass, and the pushing effect of each is the same.

Maxwell found Faraday's ideas on gravity exciting, their geometrical imagery once again arousing his enthusiasm. If the concepts of 'energy' and 'lines of force' were disentangled, it would be possible to envisage a field theory of gravity: 'I do not think gravitation a dangerous subject to apply your methods to', he told Faraday. He explains his own thoughts on the matter in some detail.

The lines of Force from the Sun spread out from him and when they come near a planet *curve out from it* so that every planet diverts a number depending on its mass from their course and substituting a system of its own so as become something like a comet, *if lines of force were visible*.



Harman continua:

Maxwell discusses the question in a “Note on the attraction of gravitation” in his paper “A dynamical theory of the electromagnetic field “ (1865). Consonant with the strategy of this paper (see Chapter VI.1), he is now concerned with the problem of gravitational energy rather than the explanation of pressure in the ether. He draw the parallel between ‘lines of gravitating force’ and lines of magnetic force, but points out that gravity is always an attractive force. He concludes that the ‘intrinsic energy of field of gravitation must therefore be less wherever there is a resultant gravitational force’, so that if gravity was effected by an ether permeating space, then ‘every part of this possesses, when undisturbed, an enormous intrinsic energy’ which be diminished by the presence of gross bodies within it. He sees little point in pursuing the issue.

Maxwell testualmente conclude:

As I am unable to understand in what way a medium can posses such properties, I cannot go any further in this direction in searching for the cause of gravitation.

Questa è un’idea di Newton che pensava di ricondurre la gravità ad una differenza di pressione in un etere cosmico (**Principia**), suggeritagli a sua volta e probabilmente dai lavori di Cartesio.

Noi qui osserviamo semplicemente che la materia che costituisce le masse gravitazionali di Newton è sede di innegabili fenomeni elettrici e magnetici (possiamo, ad esempio, ricondurre ai campi elettrici varie proprietà macroscopiche della materia quali l’elasticità, i coefficienti di dilatazione termica etc. [3]), che non possono non manifestarsi anche all’esterno della superficie dei corpi stessi, seppur tenuissimamente. Effetti fisici che possono anche sfuggire ai più raffinati strumenti moderni e che, per manifestare i loro effetti (effetto peso), hanno bisogno della presenza di notevolissime masse. E’ il caso di ricordare l’esperienza di E. Majorana con la quale si dimostra che corpi diversi *posti allo stesso potenziale* si attraggono con forze molto piccole.

Con questa idea di fondo, rifacendoci alla ben nota e sperimentata forza di Lorentz,

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}, \tag{6.1}$$

possiamo pensare che tra due masse gravitazionali M ed m si inneschi un fenomeno di mutua induzione magnetica. Per quanto detto anche a proposito dell’elettrone, imponiamo che la forza di Lorentz, normale alla traiettoria, coincida con quella centrale di gravità

$$G \frac{Mm}{\psi^2} = q \sqrt{\frac{GM}{\psi}} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}, \tag{6.2}$$

relazione dalla quale si ricava che

$$q = \sqrt{G M m} . \tag{6.3}$$

La (6.3) può essere scritta¹¹

$$q = \sqrt{G M m} = N e \rightarrow \boxed{N^2 = \frac{GMm}{e^2}} . \tag{6.4}$$

Da ciò segue, posto $N^2 = N$, che

$$\boxed{E_{gravitazionale} = G \frac{Mm}{\psi} = N \frac{e^2}{\psi} = N \frac{2\pi 137 e^2}{2\pi 137 \psi} = N \frac{hC}{\lambda} = N h \nu} , \tag{6.5}$$

equazione già trovata a proposito del circuito **C L** (§ 4). Si osserva che nel caso del sistema binario Sole - Terra $N = 3 \times 10^{72}$! Ci troviamo dunque di fronte ad un dipolo elettromagnetico gravitazionale ? E i gravitoni coincidono con i fotoni ? Ritorneremo su quest'ultima domanda. Qui diciamo solo che i fotoni e gravitoni hanno la stessa natura elettromagnetica.

La (6.5) comporta l'esistenza di un Corpo Nero Gravitazionale (CNG) con la sua catastrofe ultravioletta, riconducibile all'innata singolarità della formula di Newton, la quale, a sua volta, corrisponde ai cosiddetti Buchi Neri, **singolarità** di cui è affetta la Gravitazione Universale di Newton (e la Relatività Generale). Per quanto detto al § 2 si ha evidentemente

$$E_{Grav} = \frac{\frac{GMm}{\psi}}{\exp\left(\frac{GM}{\psi C^2}\right) - 1} = \frac{N \frac{hC}{\lambda}}{\exp\left(\frac{N hC}{\lambda m C^2}\right) - 1} . \tag{6.6}$$

Da ciò discende che anche la forza gravitazionale è data da¹²

$$F_{Grav} = \frac{GMm}{\psi^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{R}{\psi}\right) - 1} \left[1 - \frac{R}{\psi} \frac{\exp\left(\frac{R}{\psi}\right)}{\left[\exp\left(\frac{R}{\psi}\right) - 1\right]} \right] \tag{6.7}$$

avendo posto

¹¹ Gaetano Castelfranchi nel suo testo di **Fisica Moderna Atomica e Nucleare** UTET, a pag. 592-593 sul **Problema delle costanti fisiche fondamentali** pone l'accento sul rapporto adimensionale GMm/e^2 e dice che *il significato fisico di queste costanti senza dimensioni finora sfugge e riesce vago ancora il legame tra grandezze atomiche e quelle astronomiche.*

¹² Occorre osservare che le accelerazioni delle varie stelle che compongono una galassia hanno un andamento simile a quello deducibile dalla (6.7). Partendo dal centro della galassia l'accelerazione aumenta linearmente per poi, dopo un massimo, decrescere. Solo le stelle che si trovano verso la periferia della galassia osservano la Legge dell'inverso del quadrato della distanza. Non è che la (6.7) sia una buona soluzione (sperimentale) dell'insolubile problema degli enne corpi ?

$$R = \frac{GM}{\bar{C}^2} . \tag{6.8}$$

Quando \bar{C} coincide con la velocità della luce, R coincide con la metà del raggio di Swarzschild. Dobbiamo analogamente parlare di una temperatura (gravitazionale) che permea tutto l'Universo e di come questa forma di energia venga assorbita ed emessa dai dipoli gravitazionali ?

7 - Ortogonalità tra induttanza ed accelerazione

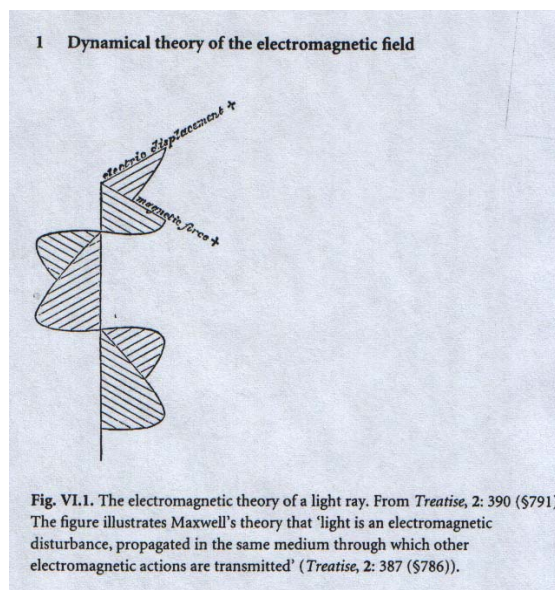
L'equivalenza tra un circuito **RCL** e un atomo di idrogeno pone in evidenza quanto segue. Possiamo immaginare, nello spazio, che una carica oscillante percorre continuamente, andando avanti ed indietro, il segmento $\psi = \overline{AB}$. Questo movimento può essere provocato da un campo elettrico oscillante oppure da un fatto puramente meccanico. Ciò comporta che tale carica è soggetta all'accelerazione $\pm \frac{d^2\psi}{dt^2}$. Detta grandezza è dunque rappresentabile con un vettore oscillante $\pm \overline{AB}$. Se, come visto, l'induttanza L è definita dalla relazione

$$L = \mp \frac{1}{\frac{d^2\psi}{dt^2}} \tag{7.1}$$

e

$$\bar{B} = 2\pi^2 \frac{L i}{A} = 2\pi \frac{L}{\psi^2} i \tag{7.2}$$

ciò implica che il relativo vettore, che è parallelo al vettore campo magnetico \bar{B} , è ortogonale al vettore spostamento. E' questa la sintesi maxwelliana rappresentata dalla figura¹³ seguente. In essa si vede come lo spostamento della carica (campo elettrico oscillante) sia ortogonale al campo magnetico e come questi due campi siano entità individuali, anche se connesse tra loro. Però il legame che discende dalla (7.2) è ancora più forte.



¹³ P.M. Harman **The Natural Philosophy of James Clerk Maxwell** (Cambridge) pag. 115

A questo punto dovrebbe essere significativo il fatto che la forza coulombiana agente sull'elettrone dell'atomo di idrogeno possa coincidere con la forza di Lorentz del campo magnetico sviluppato dal moto della carica stessa ! Quindi sinteticamente si ha

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{q^2}{\psi^2} = \vec{E} q \quad (7.3)$$

da cui si ottiene

$$\boxed{\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}}. \quad (7.4)$$

La (7.4) si può scrivere, per quanto detto al § 6, anche a proposito della gravità. In tal caso si ha

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{\check{G}}, \quad (7.5)$$

avendo indicato con $\vec{\check{G}}$ il campo gravitazionale. Detto campo, avendo definito con la (6.4) la carica elettrogravitazionale, risulta essere dato da

$$\boxed{\boxed{|\vec{\check{G}}| = \frac{\sqrt{GMm}}{\psi^2} = \sqrt{\frac{GMm}{\psi^4}} = \sqrt{\text{pressione}}}}. \quad (7.6)$$

Infatti la forza di Lorentz può dedursi dalla (7.5) e quindi si ha

$$F_{Lorentz} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{\check{G}} q \rightarrow \sqrt{GMm} \sqrt{\frac{GM}{\psi}} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} = \frac{\sqrt{GMm}}{\psi^2} \sqrt{GMm} = G \frac{Mm}{\psi^2} = F_{Newton} \quad (7.7)$$

Anche in questo caso, analogamente a quanto visto nel § 5 a proposito della (5.14), si ha¹⁴

$$\frac{\check{G}}{B} = \frac{\frac{\sqrt{GMm}}{\psi^2}}{\sqrt{\frac{m}{\psi^3}}} = \sqrt{\frac{GM}{\psi}} = v. \quad (7.8)$$

La (7.6) consente di scrivere analoghe equazioni di Maxwell per la gravità, oltre che far rivivere le differenze di pressione nell'etere di Newton. Avendo definito \check{G} si può scrivere, per il campo gravitazionale, l'equazione di d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \check{G}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \check{G}}{\partial t^2}. \quad (7.9)$$

Occorre osservare che usualmente si pone

¹⁴ Si nota che il termine $\check{G} = \sqrt{GMm/\psi^4}$ è la radice quadrata di una tensione o pressione e il termine $B = \sqrt{m/\psi^3}$ è la radice quadrata della densità di massa periferica o secondaria riferita a ψ^3 (v. formula (2.8)).

$$\tilde{G} = \frac{GM}{\psi^2} . \tag{7.10}$$

E' possibile verificare che se si parte dalla (7.10) e si usa la formula di Lorentz si ottiene

$$B = \sqrt{\frac{GM}{\psi^3}} \quad e \quad q = m. \tag{7.11}$$

Infatti anche in tal caso si ha

$$F_{Lorentz} = q v \wedge B = m \sqrt{\frac{GM}{\psi}} \wedge \sqrt{\frac{GM}{\psi^3}} = \frac{GMm}{\psi^2} = F_{Newton} , \tag{7.12}$$

ma l'interazione gravitazionale, pur rimanendo formalmente simile a quella elettromagnetica, è comunque completamente scollegata da quest'ultima.

8 - Considerazioni

Secondo le equazioni di Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \end{array} \right. \tag{8.1}$$

(suscebbili di rilettura ed evidente espansione, infatti saremmo già tentati di scrivere, ad esempio, $\oint \vec{G} \cdot d\vec{S} = \pm \sqrt{GMm}$, oppure che $\oint \vec{B} \cdot dA = \pm \frac{\hbar}{e} n$), l'onda elettromagnetica si propaga, nel vuoto, in assenza di cariche. Il vettore di Poynting, lungo il quale essa si snoda è ortogonale ai campi elettrici e magnetici e dunque un'onda elettromagnetica che si propaga in una direzione consisterebbe in una propagazione di una perturbazione di un campo elettrico e magnetico. Ma questi campi, nel vuoto, da dove escono fuori in assenza di cariche ?

Ciò detto ed analogamente, consideriamo adesso il problema di Planck del Corpo Nero. Da un punto di vista termodinamico esso viene ad essere assimilato ad un gas di fotoni (o onde elettromagnetiche) che non interagiscono tra loro e dunque, per conseguenza, per essi si pensa essere valida la meccanica statistica. Se una particella in un gas ignora la presenza di un'altra particella che le sta vicina (perché tra loro non c'è alcuna interazione o quando meno questa può essere trascurata) è evidente che debbono vigere le leggi del caos più assoluto. Tanto è vero che proprio per calcolare l'energia media del fotone Planck usa la relazione

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E \exp\left(-\frac{E}{KT}\right) dE}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{KT}\right) dE} = \frac{\int_0^{\infty} mv^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{KT}\right) dE}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{KT}\right) dE} \quad (8.2)$$

sostituendo agli integrali delle sommatorie, ma non è questo il punto. Ciò che importa evidenziare è che si adotta il termine mv^2 come fattore esprime pura energia cinetica di traslazione delle particelle, e cioè dal comportamento assolutamente caotico e che quindi esse si ignorano l'un l'altra. Sennonché Planck è condotto a sostituire l'espressione mv^2 con il termine $E = h \nu$. Ma il quanto d'azione può essere scritto

$$E = h \nu = \frac{h C}{\lambda} = \frac{2 \pi 137 e^2}{\lambda} = \frac{2 \pi 137 e^2}{2 \pi 137 \psi} = \frac{e^2}{\psi} \quad (8.3)$$

e quindi Planck viene ad ipotizzare, senza volerlo e saperlo, l'esistenza di un campo elettrico che coesiste col gas di fotoni, nel caso in cui si voglia seguire l'esperienza ideale di Jeans. Se, come al solito, si immagina l'onda elettromagnetica intrappolata in una scatola perfettamente riflettente, si dovrebbe ipotizzare l'introduzione in essa di un materiale assorbente ed emittente che consenta gli scambi energetici tra le varie onde. Ma invece di immaginare un materiale che consente gli scambi si può anche pensare che il vuoto esistente nella detta scatola sia pieno di coppie di positroni ed elettroni ($e^+ + e^- = 0$) che, nel loro insieme, danno una carica nulla, così come si ipotizza usando le equazioni di Maxwell nel vuoto, ma che invece esse siano collegate tra loro da una forza coulombiana che giustifica la (8.3). Questa ipotesi, dettata dalla (8.3), comporta che l'identità newtoniana (azione a distanza a breve raggio)

$$\frac{e^2}{\psi} = m v^2 \quad (8.4)$$

ritorna in auge (era quello che Maxwell voleva evitare) e quindi si ha

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{m \psi}}, \quad (8.5)$$

formula che può essere scritta, come già visto,

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{m \psi}} = \sqrt{\frac{e^2}{\psi^4} \frac{1}{\frac{m}{\psi^3}}} = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} \quad (8.6)$$

avendo indicato con E_y e ρ rispettivamente il modulo di elasticità e la densità dell'ipotetico etere questa volta costituito da particelle di materia e antimateria, etere al quale fu appunto attribuito un modulo di elasticità ed una densità. In proposito si osserva esplicitamente che

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{m \bar{\psi}}} = \sqrt{\frac{e^2}{\bar{\psi}^4} \frac{1}{\frac{m}{\bar{\psi}^3}}} = \sqrt{\frac{\frac{e^2}{\bar{\psi}^4}}{\frac{m}{\bar{\psi}^3}}} = \frac{E}{B}. \tag{8.7}$$

Se la coppia positrone-elettrone è separata mediamente da una distanza pari al raggio classico dell'elettrone allora la velocità del suono in questo ipotetico e particolare etere coincide proprio con la velocità della luce. Si ha quindi l'importante identità

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{e^2}{m \bar{\psi}}}}. \tag{8.8}$$

Nel sistema C.G.S. $\epsilon_0 = 1/4 \pi$ e $\mu_0 = 4\pi / C^2$. Dalla (8.8) si deduce immediatamente che

$$\frac{e^2}{\bar{\psi}} = \frac{m}{\epsilon_0 \mu_0} \Rightarrow \frac{e^2}{\bar{\psi}} = \boxed{E = \frac{m}{\epsilon_0 \mu_0} = m C^2} = \frac{hC}{\lambda_{Compton}}. \tag{8.9}$$

Moltiplicando infatti il raggio classico dell'elettrone per $(2 \pi 137)$ si ha la lunghezza d'onda Compton per l'elettrone. Dalla (8.9) si vede come emerge la celebre formula di Einstein senza alcun riferimento alla R.R. e ciò grazie all'identità (8.8). Nel sistema m.k.s. la (8.8) diventa

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m \bar{\psi}}} \tag{8.10}$$

da cui si ha

$$\frac{1}{\mu_0} = \frac{e^2}{4 \pi m \bar{\psi}} \Rightarrow \mu_0 = \frac{4 \pi m \bar{\psi}}{e^2} \tag{8.11}$$

$$\mu_0 = \frac{4 \pi m \bar{\psi}}{e^2} = \frac{4 \pi m}{\frac{e^2}{\bar{\psi}}} \Rightarrow \boxed{\frac{e^2}{\bar{\psi}} = m \frac{4\pi}{\mu_0} \Rightarrow E = m C^2} \tag{8.12}$$

dove

$$\bar{\psi} = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m C^2} \tag{8.13}$$

è il raggio classico dell'elettrone. Ora la relazione (2.9) e cioè la

$$v = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} = \sqrt{\frac{2e^2}{\bar{\psi}^4} \frac{1}{\frac{m}{\bar{\psi}^3}}} = \sqrt{\frac{2e^2}{m \bar{\psi}}} \tag{8.14}$$

è abbastanza verificata sia nei solidi che nei gas [3]. Si ha dunque che [3]

$$m v^{-2} = 2 \frac{e^2}{\psi} . \quad (8.15)$$

Abbiamo visto che Planck, nella soluzione del Problema del Corpo Nero, usa la statistica dei gas (Boltzman), ma la rilettura della sua formula denuncia l'esistenza di un campo elettrico (la cui esistenza è ancor più evidente se si considera il dipolo). Vogliamo adesso vedere come, presupponendo l'esistenza di un campo elettrico anche nei gas, si possa giungere all'equazione dei gas perfetti (perfetti appunto perché le particelle dei gas si presuppongono ignorarsi l'una con l'altra). Consideriamo che l'energia di una ipotetica particella di gas può essere scritta

$$E = \frac{e^2}{\psi} = \frac{e^2}{\psi^4} \psi^3 = p v = k T \quad (8.16)$$

avendo indicato con p e v la pressione ed il volume relativi ad un singolo atomo del gas in esame. Se poniamo

$$N p v = P V \quad (8.17)$$

dalla (8.17) abbiamo

$$N = \frac{P V}{p v} = \frac{P V}{\frac{e^2}{\psi}} . \quad (8.18)$$

Dunque il rapporto tra l'energia totale contenuta in una grammolecola di gas e l'energia che compete ad un singolo atomo dovrebbe essere pari al numero di Avogadro, se è vera l'identità (8.16). Sappiamo che in condizioni ordinarie, alla pressione atmosferica (1.033×10^6 dyne) una mole di gas occupa un volume pari 22,414 litri (22414 cm^3). In tali condizioni una particella di gas ha un percorso¹⁵ *libero medio* di 6.2×10^{-6} cm. e quindi si ha (c.g.s.) [3]

$$N = \frac{1.033 \times 10^6 \times 22\,414}{\frac{(4.8 \times 10^{-10})^2}{6.2 \times 10^{-6}}} = 6.23 \times 10^{23} \quad (8.19)$$

che praticamente coincide con il detto numero. **Allora dovremmo parlare più propriamente di elettro-termodinamica** ? In più la (8.19) si può anche scrivere

$$N = \frac{P \times V}{\frac{e^2}{\psi}} = \frac{P \times V}{h \nu} \quad (8.20)$$

da cui discende che

$$\nu_{media} = \frac{P \times V}{h N} = \frac{k T}{h} \Leftrightarrow \lambda_{media} = \frac{h C}{k T} = \frac{2 \pi 137 e^2}{m C^2} = 2 \pi 137 \psi_{media} \quad (8.21)$$

e si può interpretare ν (o λ) come frequenza (lunghezza d'onda) media elettromagnetica emessa dal gas alla data temperatura T (calore). D'altra parte se ammettiamo che un corpo solido è coeso per legami elettrici per quale motivo, visto e considerato che il campo

¹⁵ Gaetano Castelfranchi **Fisica Sperimentale ed Applicata** Vol. 1 pag. 458.

elettrico ha un raggio d'azione infinito, le molecole di un gas, ottenuto sottoponendo un solido ad una certa temperatura, non dovrebbero più risentire di una tale azione ?

Ma quando una sterminata nube galattica di idrogeno (che non occupa tutto l'Universo, come vorrebbero le nostre leggi sui gas) collassa è perché si rompe un equilibrio tra un campo elettrico ed un'agitazione termica e allora perché parliamo di collasso *gravitazionale* ? In proposito si noti come, in analogia con la (8.18), si abbia anche in gravità

$$N^2 = \frac{G \frac{Mm}{e^2}}{\psi} \rightarrow E_{Grav.} = N^2 h \nu = N^2 k T. \quad (8.22)$$

La (8.22), analogamente a quanto dedotto per i gas nel § 8, formule (8.16) e seguenti, prevede l'esistenza di una radiazione termica che permea tutto l'universo.

9 - Pensieri eccessivamente vaghi

La formula (dedotta dalla relazione di Planck $E = h \nu n$)

$$\lambda = 2 \pi 137 \bar{\psi} n = 2 \pi \frac{C}{\nu} \bar{\psi} n, \quad (9.1)$$

data l'ortogonalità tra la direzione di λ e quella di ψ , suggerisce l'ovvia relazione

$$\psi = \bar{\psi} \sin\left(2 \pi \frac{x}{\lambda} - 2 \pi \nu t\right) \quad (9.2)$$

oppure

$$\psi = \bar{\psi} \sin\left(2 \pi \frac{x}{2 \pi 137 \bar{\psi} n} - 2 \pi \nu t\right). \quad (9.3)$$

La (9.2), tenuto conto della (8.8), è soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{[m] \bar{\psi}}{e^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{[m] 2 \pi 137 \bar{\psi}}{2 \pi 137 e^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{m \bar{\lambda}}{h C} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_{Compton}}\right) \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (9.4)$$

dove $[m]$ è la massa a riposo, e quindi, più in generale, si ha

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_{Compton}}\right) \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_{Compton}}\right) \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (9.5)$$

oppure

$$\nabla^2 \bar{\Psi} = \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_c}\right) \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial t^2}, \quad (9.6)$$

tenendo presente che il termine

$$\left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_c}\right)\mu_0\varepsilon_0 \tag{9.7}$$

contiene in sé la trasformazione di massa in energia secondo la nota relazione $E = m C^2$. Tenuto conto che

$$\left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_c}\right)\mu_0\varepsilon_0 = \frac{\frac{e^2}{m v^{-2}}}{\frac{e^2}{m C^2}} \frac{1}{C^2} = \frac{1}{\bar{v}^2} \tag{9.8}$$

la (9.6) si può anche scrivere

$$\nabla^2 \bar{\Psi} = \frac{1}{\bar{v}^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial t^2} \tag{9.9}$$

dove \bar{v} è la velocità media della carica oscillante. Volendo riconoscere la presenza di un campo elettrico nel vuoto la (9.9) diventa

$$\nabla^2 \bar{\Psi} = \frac{h C}{m \lambda} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial t^2} \tag{9.10}$$

Ma questa volta il termine $\partial^2 \bar{\Psi} / \partial t^2$ è ricollegabile al campo magnetico. Osserviamo che l'equazione di Schrödinger non contempla la trasformazione eisteiniana della massa in energia e presenta le note divergenze [7]. Ma forse è opportuno ritornare alla (3.21) con un adeguato forzante [3].

10 - Esperimento Crucis – I fotogravitoni

La teoria innanzi esposta sull'origine della gravità può essere oggetto di vari esperimenti. Ne considereremo solo alcuni. Allo scopo esaminiamo il dipolo gravitazionale costituito dalla Terra e da una massa unitaria posta sulla sua superficie.

Questo dipolo può essere visto come un comune circuito oscillante RLC che quindi emette onde gravitazionali. In proposito l'equazione (3.21) e cioè

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \left(\frac{q_0}{\psi} - E_0 \right) \cos(\Omega t) \tag{10.1}$$

può essere usata per lo studio del dipolo gravitazionale quando si ponga $q_0 = \sqrt{GMm}$ come valore medio stazionario. Per quanto visto in precedenza, indicando con g l'accelerazione gravitazionale sulla superficie terrestre, si ha che la frequenza di questa radiazione è data da

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{d^2\psi}{dt^2}}\psi}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{GM_T}{R_T^2}}R_T}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{g}R_T}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R_T}}. \quad (10.2)$$

Si riconosce subito che la (10.2) è la nota formula del pendolo che abbia una lunghezza pari al raggio terrestre. In numeri si ha che la frequenza di questa radiazione è¹⁶

$$\nu_g = \sqrt{\frac{981}{4\pi^2 \cdot 6.35 \times 10^8}} \approx 0.000197 [1/\text{sec.}] = 2 \times 10^{-4} [Hz] \rightarrow \lambda_g \approx 1.52 \times 10^{14} [cm.] \quad (10.3)$$

Consideriamo la velocità che deve possedere la massa unitaria per stare in orbita intorno alla Terra ad una distanza dal suo centro pari ad R_T . Evidentemente si ha

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_T}}. \quad (10.4)$$

Per il calcolo della lunghezza d'onda gravitazionale usiamo la relazione generalizzata (3.34) già trovata

$$\lambda_g = 2\pi \frac{C}{v} \psi. \quad (10.5)$$

Dalla (10.5), tenuto conto della (10.4), si ha

$$\lambda_g = 2\pi \frac{C}{v} \psi = 2\pi \frac{C}{\sqrt{\frac{GM}{R_T}}} R_T = \frac{C}{\sqrt{\frac{GM}{4\pi^2 R_T^3}}} = \frac{C}{\sqrt{\frac{g}{4\pi^2 R_T}}} = \frac{C}{\nu_g}, \quad (10.6)$$

che coincide con il valore (10.3). E' inoltre immediato dimostrare che se al dipolo gravitazionale si applica il forzante impulsivo di cui alla formula (2.12), si perviene, tra l'altro, alla relazione [8, pag. 36 formula (7.31)] [9]

$$\boxed{\lambda_g = 2\pi \frac{C}{v} \psi n}. \quad (10.7)$$

Ciò comporta che i gravitoni sono sostanzialmente identici ai fotoni ma, in genere, si differenziano da questi ultimi in quanto, nella stragrande maggioranza dei casi, essi sono caratterizzati da bassissime frequenze, così come si evince dalla (10.3), a differenza di quanto normalmente avviene per i fotoni.

¹⁶ Attualmente i rilevatori di onde gravitazionali sono progettati per frequenze molto maggiori (VIRGO) che vanno dai 10 a 6000 Hz e cercano di rivelare deformazioni che le onde gravitazionali produrrebbero nella materia. Se invece la gravità è riconducibile al campo elettromagnetico, come coerentemente vorrebbe il Principio di unificazione delle interazioni note, allora si tratta di captare semplicemente particolari onde elettromagnetiche che hanno frequenze bassissime !

Ma quando la massa gravitazionale centrale **M** è molto compatta e quindi permette che la velocità della massa periferica **m** possa essere paragonabile a quella della luce (nel caso dell'elettrone si ha $v = C/137$), il gravitone assume la veste di un comune fotone.

A questo proposito si ha la generalizzazione della costante di accoppiamento [7]. Tenuto conto che

$$h C = 2 \pi e^2 137, \tag{10.8}$$

per quanto in precedenza detto, si può scrivere¹⁷

$$h_g C = 2\pi (GMm) \frac{C}{v} = 2\pi \left(\frac{GM}{\psi} \right) \psi m \frac{C}{v} = 2\pi (v^2) \psi m \frac{C}{v} = 2\pi m \psi v C \tag{10.9}$$

e quindi in generale si ha

$$h_g C = 2 \pi m \psi v C . \tag{10.10}$$

Nel caso dell'atomo di idrogeno si ha che la (10.10) diventa

$$h C = 2 \pi m [\psi](v) C = 2 \pi m \left[\frac{e^2}{mC^2} 137^2 \right] \left(\frac{C}{137} \right) C = 2 \pi e^2 137 \tag{10.11}$$

ritrovando così la relazione della costante di struttura fine e quindi si vede come la (10.10) consente di passare dalla gravità all'elettromagnetismo e viceversa. Ciò comporta che la (6.5) va riscritta nella seguente forma

$$E_g = N \frac{e^2}{\psi} = N \frac{2\pi \frac{C}{v} e^2}{2\pi \frac{C}{v} \psi} = N \frac{h_g C}{\lambda_g} = N h_g v_g . \tag{10.12}$$

Come si diceva, gli attuali rilevatori d'onde gravitazionali sono progettati per rilevare frequenze (preciseremo la loro natura) che vanno dai 10 ai 6000 Hz. Ciò comporta, nella migliore delle ipotesi ed in base a questa tesi, che il raggio di una stella con una massa pari a quella del Sole dovrebbe essere, per 10 Hz, inferiore a

$$R_{Stella} = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2 v^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.66 \times 10^{-8} \times 1989 \times 10^{27}}{4\pi^2 10^2}} = 3.225.396 [cm.] = 32.25 [Km.] , \tag{10.13}$$

fino ad arrivare, per 6000 Hz, a raggi pari a

$$R_{Stella} = \sqrt[3]{\frac{6.66 \times 10^{-8} \times 1989 \times 10^{27}}{4\pi^2 6000^2}} = 45.340 [cm.] = 0.45 [Km.] , \tag{10.14}$$

Secondo la Relatività Generale, nell'approssimazione newtoniana, un dipolo gravitazionale composto da due masse M ed m, rispetto ad un sistema ancorato al baricentro della massa M, irradierebbe una potenza pari a

¹⁷ Relazione già trovata nel lavoro del 1982 [9] (v. formula (17) pag. 6). In questo lavoro si vede chiaramente che la carica elettrogravitazionale è pari a \sqrt{GMm} .

$$P_{R.G.} = \frac{32 G^4 (M m)^2 (M + m)}{5 \psi^5 C^5}. \quad (10.15)$$

Se invece si ammette l'equivalenza tra l'interazione gravitazionale e quella elettromagnetica si ha che la potenza emessa da una carica oscillante (formula di Larmor) è data da ¹⁸

$$P_G = \frac{2 q^2 a^2}{3 C^3} = \frac{2 G M m \left(\frac{GM}{\psi^2} + \frac{Gm}{\psi^2} \right)^2}{3 C^3} = \frac{2 G^3 (M m) (M + m)^2}{3 \psi^4 C^3}. \quad (10.16)$$

Introducendo la massa ridotta

$$\mu = \frac{M m}{(M + m)} \quad (10.17)$$

ed il raggio di Swarzschild

$$R_s = \frac{2G}{C^2} \quad (10.18)$$

il rapporto tra la (10.16) e la (10.15) è pari all'espressione adimensionale

$$Rapp. = \frac{5 (M + m) C^2 \psi}{48 G M m} = \frac{5 \psi}{24 \frac{2 G M m}{(M + m) C^2}} = \frac{5 \psi}{24 \frac{2 G \mu}{C^2}} = \frac{5 \psi}{24 R_{Swars.}} \approx \frac{1}{5} \frac{\psi}{R_{Swars.}}. \quad (10.19)$$

In effetti la relazione relativistica (10.15), introducendo in essa il Raggio di Swarzschild e la massa ridotta, può essere scritta

$$P_{R.G.} = \frac{32 G^4 (M m)^2 (M + m)}{5 \psi^5 C^5} = \frac{2 G^3 (M m) (M + m)^2}{3 C^3 \psi^4} \frac{3 \times 8}{5} \frac{2 G \mu}{C^2 \psi} = \quad (10.20)$$

oppure

$$P_{R.G.} \approx \frac{2 G^3 (M m) (M + m)^2}{3 C^3 \psi^4} 5 \frac{R_{Sw}}{\psi} = P_G \frac{5 R_{Sw}}{\psi} \quad (10.21)$$

Dalla (10.21) si vede che quando la distanza ψ tra le due masse è pari a 5 volte il raggio di Swarzschild le previsioni della (10.16) coincidono, solo numericamente, con quelle della Relatività Generale.

Ma quando $\psi \approx 5 R_s$ la massa periferica m ha una velocità di rivoluzione pari a circa 1/3 di quella della luce (quella dell'elettrone nell'atomo di idrogeno è 1/137 di C) ed allora il gravitone emesso è un vero e proprio fotone. Ciò spiegherebbe anche perché le onde gravitazionali previste dalla R. G. non sono ancora state rilevate. D'altra parte è opportuno precisare che, sebbene in casi particolari ($\psi \approx 5 R_s$), si hanno gli stessi risultati numerici, radicalmente diversi sono gli effetti fisici su un corpo investito dall'onda gravitazionale.

¹⁸ L'accelerazione è calcolata rispetto al centro della massa M centrale.

Secondo la R.G. questo corpo subisce delle contrazioni e dilatazioni ortogonali al raggio gravitazionale per cui si è portati a progettare strumenti che rilevino queste deformazioni elastiche dei corpi investiti o variazioni di distanze tra due corpi in caduta libera. Se invece la gravità non è altro che una manifestazione elettromagnetica, come qui si ipotizza, allora occorre semplicemente rilevare delle onde esclusivamente elettromagnetiche, sebbene caratterizzate da frequenze bassissime.

La potenza gravitazionale emessa da una massa pari ad un grammo, sulla superficie terrestre è pari a

$$P_G = \frac{2}{3} \frac{G^3 (M m) (M + m)^2}{\psi^4 C^3} \approx \frac{2}{3} \frac{G^3 M^3}{\psi^4 C^3} = \frac{2}{3} \frac{(6.66 \times 10^{-8} \times 5.9 \times 10^{27})^3}{(6.4 \times 10^8)^4 (2.998 \times 10^{10})^3} = 8.9 \times 10^{-6} \left[\frac{erg}{sec} \right] \quad (10.22)$$

Siamo inoltre in grado di calcolare i relativi campi elettrico e magnetico (induzione magnetica) . In tal caso si ha

$$\check{G} = \sqrt{\frac{GMm \left(1 + \frac{m}{M}\right)}{\psi^4}} = 4.8 \times 10^{-8} [stat V / cm] \rightarrow 4.8 \times 10^{-8} \times 3 \times 10^4 = 1.44 \times 10^{-4} [V / m]^{19} \quad (10.23)$$

e

$$B = \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} = 6.17 \times 10^{-14} [stat T] \rightarrow 6.17 \times 10^{-14} \times 3 \times 10^6 = 1.85 \times 10^{-7} [Wb m^{-2}]. \quad (10.24)$$

Il rapporto

$$\frac{\check{G}}{B} = v = \sqrt{\frac{GM}{\psi} \left(1 + \frac{m}{M}\right)} = 777\,161 [cm / sec] \rightarrow \frac{1.44 \times 10^{-3}}{1.85 \times 10^{-7}} = 7.783 \times 10^3 [m / sec] \quad (10.25)$$

coincide con la velocità dell'orbita newtoniana. Invece la potenza gravitazionale irradiata in tal caso, secondo la R.G., è estremamente più piccola. Dalla (10.21) si ha

$$P_{R.G.} = 8.9 \times 10^{-6} \frac{5R_s}{\psi} = 8.9 \times 10^{-6} \times 6.82 \times 10^{-9} = 6.07 \times 10^{-14} \left[\frac{erg}{sec} \right]. \quad (10.26)$$

Evidentemente il problema dell'onda gravitazionale non consiste solo nel rilievo sperimentale della stessa, ma anche nell'individuazione della sorgente appunto per verificare che i suoi parametri fisici corrispondano a quelli previsti dalla teoria.

¹⁹ Un Franklin corrisponde a $3.3356 \times 10^{-10} Coulomb$. Tra la Terra ed un grave di un grammo dovrebbe esistere una carica di $\sqrt{GM_T} = \sqrt{6.67 \times 10^{-8} \times 5.983 \times 10^{27}} = 2 \times 10^{10} Franklin = 6.67 Coulomb$, rilevabile da un osservatore esterno al sistema.

In merito al grave terrestre abbiamo visto che per esso, in perfetta analogia con l'elettromagnetismo classico e quantistico, la frequenza dell'onda gravitazionale dovrebbe coincidere con l'inverso del tempo di rivoluzione intorno alla massa centrale sulla data orbita, e cioè pari ((10.3)) $2 \times 10^{-4} Hz$. E' d'altra parte noto che, sulla superficie terrestre, siamo immersi in un bagno geomagnetico facilmente rilevabile e ben monitorato dagli Osservatori Geomagnetici che studiano frequenze **elettromagnetiche** nell'intervallo $[0.001 Hz - 100 KHz]$, campo attualmente giustificato in modo molto incerto e che invece potrebbe trovare una spiegazione di carattere gravitazionale.

Sarebbe anche opportuno studiare il sistema planetario costituito da Giove e le sue Lune. Nel caso del satellite Metis, la luna più veloce di tutte (scoperta nel 1979), si avrebbe una frequenza elettromagnetica di $3.93 \times 10^{-5} Hz$. La potenza elettromagnetica irradiata sarebbe pari a

$$P_G = \frac{2 G^3 M^3}{3 \psi^4 C^3} = \frac{2 (6.66 \times 10^{-8} \times 1897.1 \times 10^{27})^3}{3 (1.28 \times 10^{10})^4 (2.998 \times 10^{10})^3} = 1.86 \times 10^{-3} \left[\frac{erg}{sec} \right]. \quad (10.27)$$

Sulla superficie lunare si avrebbe una frequenza di $1.5 \times 10^{-4} Hz$ ed una potenza di

$$P_G = \frac{2 G^3 M^3}{3 \psi^4 C^3} = \frac{2 (6.66 \times 10^{-8} \times 0.0735 \times 10^{27})^3}{3 (1738 \times 10^5)^4 (2.998 \times 10^{10})^3} = 3.18 \times 10^{-9} \left[\frac{erg}{sec} \right]. \quad (10.28)$$

Il sistema Terra-Luna sarebbe invece caratterizzato da una frequenza di $4.23 \times 10^{-7} Hz$ e da una potenza

$$P_G \simeq \frac{2 G^3 M^3}{3 \psi^4 C^3} = \frac{2 (6.66 \times 10^{-8} \times 5.9 \times 10^{27})^3}{3 (0.3844 \times 10^{11})^4 (2.998 \times 10^{10})^3} = 6.87 \times 10^{-13} \left[\frac{erg}{sec} \right]. \quad (10.29)$$

Dall'esame di questi dati si vede che un buon candidato per una verifica della presente tesi sarebbe proprio il sistema binario Giove-Metis.

E' forse opportuno rimarcare che la definizione della carica gravitazionale consente di tradurre tutte le grandezze dell'elettrodinamica classica in gravità. Per esempio, è possibile definire, per un sistema binario M+m, anche il magnetone gravitazionale che risulta essere dato da

$$\mu_G = \frac{1}{2} GMm \left(1 + \frac{m}{M} \right) \sqrt{\frac{\psi}{m} \left(1 + \frac{m}{M} \right)}. \quad (10.30)$$

Infatti, sostituendo la carica gravitazionale con quella atomica si ha

$$\mu_G = \frac{1}{2} e^2 \sqrt{\frac{\psi}{m}} = \frac{1}{2} e^2 \sqrt{\frac{e^2}{m^2 C^2} 137^2} = \frac{1}{2} e^2 \frac{e}{mC} 137 = \frac{1}{2} e \frac{\hbar}{m}. \quad (10.31)$$

11- Esperimenti di laboratorio

Consideriamo ancora il caso di una massa di un grammo sulla superficie terrestre. Allora abbiamo

$$q = \sqrt{GM_T \times 1} = \sqrt{6.67 \times 10^{-8} \times 5.983 \times 10^{27} \times 1} = 2 \times 10^{10} Fr = 6.67 \text{ Coulomb} . \quad (11.1)$$

Il potenziale sarà

$$V = \frac{q}{\psi} = \frac{2 \times 10^{10}}{6.368 \times 10^8} = 31.4 [Fr / cm] \quad (11.2)$$

oppure

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\psi} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{8.85 \times 10^{-12}} \frac{6.67}{6.368 \times 10^6} = 9.418 [C / m]. \quad (11.3)$$

L'accelerazione sulla superficie terrestre è

$$g = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\psi} \right) \frac{q}{\psi m} = (9418) \frac{6.67}{6.368 \times 10^6 \times \frac{1}{1000}} = 9.8 [m / sec^2]. \quad (11.4)$$

E' opportuno osservare che in un campo elettrico l'accelerazione è data da

$$g = \frac{q^2}{m\psi^2} . \quad (11.5)$$

Nel caso del campo gravitazionale si avrà invece

$$g = \frac{q^2}{m\psi^2} = \frac{(\sqrt{GMm})^2}{m\psi^2} = \frac{GM}{\psi^2} \quad (11.6)$$

e quindi è verificata la Legge di Caduta di Galilei, cosa che invece appariva come una sostanziale differenza tra la gravità e le altre note interazioni (Principio di equivalenza della R.G.).

Va però osservato che l'accelerazione data dalla (11.6) è quella della massa secondaria m rispetto al baricentro delle due masse. Quando invece si considera il sistema di riferimento ancorato alla massa centrale M si ha

$$g = \frac{q^2}{m\psi^2} = \frac{\left(\sqrt{GMm \left(1 + \frac{m}{M} \right)} \right)^2}{m\psi^2} = \frac{GM}{\psi^2} \left(1 + \frac{m}{M} \right), \quad (11.7)$$

relazione che si ottiene alla III Legge di Keplero, rivisitata da Newton. In proposito (moto del perielio di Mercurio) vedi www.carlosantagata.it.

12 – La materia e l'interazione elettromagnetica

Come già osservato nell'articolo [9], la materia, sia allo stato solido, liquido che gassoso, ha delle proprietà macroscopiche che possono facilmente ricollegarsi a grandezze fisiche microscopiche [9]. Consideriamo ad esempio una sbarra di alluminio. Per essa abbiamo visto che possiamo determinare le sue proprietà macroscopiche, quali il modulo di Young e la velocità del suono con la formula [9]

$$v = \sqrt{\frac{1.553 \times e^2}{m \times \psi}} = \sqrt{\frac{1.553 \times (4.8 \times 10^{-10})^2}{26.98 \times 1.673 \times 10^{-24} \times 2.86 \times 10^{-8}}} = 5.2 \times 10^5 \text{ [cm/sec]}. \quad (12.1)$$

Il valore sperimentale è di $5 \times 10^5 \text{ [cm/sec]}$. Il coefficiente correttivo 1.553 dipende dalla struttura del cristallo in esame. Ma anche un atomo in seno alla materia può essere visto come un circuito elettromagnetico RCL. Infatti la (12.1) può essere scritta

$$v = \sqrt{\frac{1.553 \times e^2}{m \times \psi}} = \sqrt{\frac{1.553 \frac{e^2}{\psi^4}}{\frac{m}{\psi^3}}} = \sqrt{\frac{E_{Young}}{\rho}} = \frac{\sqrt{E_{Young}}}{\sqrt{\rho}} = \frac{E}{B} \quad (12.2)$$

E dunque il campo elettrico e l'induzione magnetica sono rispettivamente dati dalla radice quadrata del modulo di Young e dalla radice quadrata della densità.

Il modulo di elasticità di Young teorico (12.2), nel caso della barra di alluminio, è dato da

$$E_{Young} = 1.553 \frac{e^2}{\psi^4} = 1.553 \frac{(4.8 \times 10^{-10})^2}{(2.86 \times 10^{-8})^4} = 5.34 \times 10^{11} \text{ [dyne/cm}^2\text{]} = 5.3 \times 10^5 \text{ [Kg/cm}^2\text{]} \quad (12.3)$$

Il valore sperimentale [10]

$$E_{Young} = c_{11} - \frac{2 \times c_{12}^2}{c_{11} + c_{12}} = \left(1.08 - \frac{2 \times 0.62^2}{1.08 + 0.62} \right) \times 10^{12} = 6,2 \times 10^{11} \text{ [dyne/cm}^2\text{]} = 6.2 \times 10^5 \text{ [Kg/cm}^2\text{]} \quad (12.4)$$

La densità risulta essere²⁰

$$\rho = \frac{m}{\psi^3} = \frac{26.98 \times 1.673 \times 10^{-24}}{(2.82 \times 10^{-8})^3} = 2 \text{ [g/cm}^3\text{]}. \quad (12.5)$$

Il campo elettrico risulta allora essere

$$E = \sqrt{5.34 \times 10^{11}} = 730753 \text{ [stat V/m]} = 2.19 \times 10^{10} \text{ [V/m]} \quad (12.6)$$

²⁰ Quella sperimentale è di 2.6 g/cm^3 .

e l'induzione magnetica

$$B = \sqrt{2} = 1.41 [\text{stat } T] = 1.41 \times 3 \times 10^6 = 4.23 \times 10^6 [\text{tesla}(T)] \quad (12.7)$$

e quindi si ha

$$v = \frac{E}{B} = \frac{2.19 \times 10^{10}}{4.23 \times 10^6} = 5.2 \times 10^3 [\text{m}/\text{sec}]. \quad (12.8)$$

E' dunque evidente che una deformazione della barra di alluminio comporterà una variazione dei campi elettrici e magnetici e quindi lo stato tensionale può rilevarsi attraverso il rilievo non distruttivo dei campi elettrici e magnetici.

Se ora consideriamo il sistema RCL Terra-Luna abbiamo che

$$E = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-8} \times 5.976 \times 10^{27} \times 7.35 \times 10^{25}}{(0.3844 \times 10^{11})^4}} = 115.84 \times 3 \times 10^4 = 3.475 \times 10^6 [\text{V}/\text{m}] \quad (12.9)$$

e

$$B = \sqrt{\frac{7.35 \times 10^{25}}{(0.3844 \times 10^{11})^3}} = 0.0011 \times 10^6 = 1.1 \times 10^3 [\text{Wb}/\text{m}^2] \quad (12.10)$$

da cui si ha

$$v_{Luna} = \frac{115.84}{0.0011} = 1.05 \times 10^5 [\text{cm}/\text{sec}] = \frac{115.84 \times 3 \times 10^4}{0.0011 \times 3 \times 10^6} = 1.05 \times 10^3 [\text{m}/\text{sec}]. \quad (12.11)$$

Come si vede dal confronto tra le (12.6)-(12.7) e le (12.9)-(12.10) i campi elettromagnetici di una sbarra di alluminio sono molto più forti di quelli del sistema binario Terra-Luna.

Occorre infine osservare che la (12.2) può anche essere scritta

$$v = \frac{\sqrt{E_{Young}}}{\sqrt{\rho}} = \frac{E}{B} = \frac{\frac{e}{\psi^2}}{\frac{\mathcal{H}}{\psi^2}} = \frac{e}{\mathcal{H}} = \frac{e}{\sqrt{m\psi}} = \sqrt{\frac{e^2}{m\psi}} \quad (12.12)$$

13 Gli acceleratori di particelle

Vogliamo sottolineare una questione di fondo che va chiaramente esposta. Con Maxwell abbiamo avuto la grande conquista che la luce si propaga nel vuoto con la nota velocità C. Ma non è stato mai chiarito perché il rapporto tra la misura di una stessa quantità di elettricità rilevata elettrostaticamente ed elettrodinamicamente coincide con la velocità della luce. Per quanto visto a proposito dell'atomo di idrogeno, il campo elettrico e quello magnetico sono indissolubilmente legati dalla relazione newtoniana

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{m\psi}}, \quad (13.1)$$

relazione che costituisce uno strettissimo collegamento tra il campo elettrico e quello magnetico. Ma questa relazione, nel caso dell'atomo di idrogeno, può essere scritta

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{m\psi}} = \frac{\frac{e}{\psi^2}}{\sqrt{\frac{m}{\psi^3}}} = \frac{E}{B}. \quad (13.2)$$

Da ciò si deduce che se è data v ed E è univocamente determinato B ed esso è esattamente pari a

$$B = \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} \quad (13.3)$$

e viceversa. Generalizziamo il caso dell'atomo di idrogeno ed immaginiamo di poter avere un atomo macroscopico con una carica centrale Q ed una carica periferica q la quale orbita con velocità v su una circonferenza di raggio ψ . Supponiamo di avere un indipendente campo magnetico B , ortogonale all'orbita descritta dalla carica orbitante e tale che

$$qv \wedge B = \frac{mv^2}{\psi}. \quad (13.4)$$

Da questa relazione otteniamo

$$B = \frac{mv}{q\psi}. \quad (13.5)$$

D'altra parte, dato che agisce sulla particella orbitante agisce anche un campo elettrico abbiamo anche che

$$v = \sqrt{\frac{Qq}{m\psi}}. \quad (13.6)$$

Dalle (13.5) e (13.6) segue che

$$B = \sqrt{\frac{Q}{q}} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}. \quad (13.7)$$

Infatti dalla relazione

$$v = \frac{E}{B} = \frac{\frac{Q}{\psi^2}}{\sqrt{\frac{Q}{q}} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}} = \sqrt{\frac{Qq}{m\psi}} \quad (13.8)$$

si ottiene la (13.7). Nel caso particolare dell'atomo di idrogeno si ha, come già detto, che

$$B = \sqrt{\frac{Q}{q}} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} = \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}. \quad (13.9)$$

Possiamo dunque affermare che un campo elettrico E genera sulla carica secondaria q un'induzione magnetica

$$B = \sqrt{\frac{Q}{q}} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} \quad (13.10)$$

tale che

$$v = \frac{E}{B} = \frac{\frac{Q}{\psi^2}}{\sqrt{\frac{Q}{q}} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}} \quad (13.11)$$

Risulta allora evidentemente che i campi elettrici e magnetici sono biunivocamente coniugati tra loro attraverso la relazione (13.10). Ciò comporta, visto e considerato che una carica accelerata genera in ogni caso una precisa induzione magnetica B , che l'applicazione di un campo magnetico esterno ed indipendente può provocare l'annullamento del campo elettrico applicato in precedenza. In ogni caso esso va ad interagire con l'auto induzione magnetica che genera la carica.

Si può pertanto concludere che in un dipolo elettromagnetico naturale (p.e. atomo di idrogeno), in condizioni di risonanza, la forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (13.12)$$

viene a modificarsi

$$q\vec{E} = q\frac{\vec{E}}{B} \wedge \vec{B}. \quad (13.13)$$

Poiché può porsi in tal caso che

$$\vec{v} = \frac{\vec{E}}{B} = \frac{\vec{C}}{137n} \quad (13.14)$$

si ha anche che

$$q\vec{E} = q\frac{\vec{E}}{B} \wedge \vec{B} = q\frac{\vec{C}}{137n} \wedge \vec{B}. \quad (13.15)$$

Ciò detto, consideriamo, ad esempio, il caso del ciclotrone dell'Università di Pittsburgh [6, pag. 207] il quale ha una frequenza propria di $12 \times 10^8 [Hz]$ ed un raggio di $53.4 [cm.]$. In effetti con tale frequenza viene applicato alla particella un campo elettrico che la accelera. Vogliamo calcolare il valore dell'induzione magnetica per far sì che i deutoni percorrano una circonferenza di raggio pari a $53.4 [cm.]$ e si trovino nella zona del campo elettrico ogni qual volta esso assume una certa d.d.p. (risonanza). I deutoni hanno una massa di $m = 3.3 \times 10^{-24} [g.]$, doppia di quella dei protoni, ma hanno la loro stessa carica $1.6 \times 10^{-19} C = 4.8 \times 10^{-10} [Fr]$. Immaginiamo che al centro di questo ciclotrone ci sia una carica elettrica virtuale Q la cui forza centripeta sia annullata dalla velocità di percorrenza dei deutoni sulla loro orbita. Dalla (13.6) si ha

$$Qq = (2\pi\nu)^2 m\psi^3 = (2\pi \times 12 \times 10^6)^2 \times 3.3 \times 10^{-24} \times (53.4)^3 = 2.8566 \times 10^{-3} [Fr] \quad (13.16)$$

da cui segue che

$$Q = \frac{2.8566 \times 10^{-3}}{4.8 \times 10^{-10}} = 5.95 \times 10^6 [Fr]. \quad (13.17)$$

Dalla (13.10) si ha

$$B = \sqrt{\frac{Q}{q}} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} = \sqrt{\frac{5.94 \times 10^6}{4.8 \times 10^{-10}}} \sqrt{\frac{3.3 \times 10^{-24}}{(53.4)^3}} = 1.11 \times 10^8 \times 4.65 \times 10^{-15} = 5.17 \times 10^{-7} [stat T] \quad (13.18)$$

e quindi

$$B = 5.16 \times 10^{-7} [stat T] \times 3 \times 10^6 = 1.55 [Wb / m^2]. \quad (13.19)$$

Tradizionalmente questo calcolo viene fatto nel seguente modo. Si considera la formula di Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{m v^2}{\psi}. \quad (13.20)$$

Da essa si ha, nota la frequenza, che la velocità è

$$v = \frac{q B}{2 \pi m} \quad (13.21)$$

da cui

$$B = \frac{m v}{q \psi} = \frac{2 \pi \psi v m}{q \psi} = \frac{2 \pi v m}{q} = \frac{2 \pi \times 12 \times 10^6 \times (3.3 \times 10^{-27} Kg)}{1.6 \times 10^{-19} C} = 1.55 [Wb / m^2]. \quad (13.22)$$

Per rimarcare la profonda differenza tra l'attuale concezione secondo la quale i campi elettrici e magnetici che possono essere applicati ad una carica in movimento sono completamente indipendenti l'uno dall'altro, indipendenza sintetizzata dalla formula di Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}, \quad (13.23)$$

e i risultati qui ottenuti, facciamo adesso riferimento a due cariche (o masse gravitazionali) Q e q (o M ed m) che orbitano l'una intorno all'altra.

Con ciò ammettiamo esplicitamente che esiste solo un campo elettrico (gravitazionale) tra le due cariche (masse) e scriviamo ovviamente

$$\frac{m v^2}{\psi} = \frac{Q q}{\psi^2}. \quad (13.24)$$

Da questa relazione discende

$$v = \sqrt{\frac{Q q}{m \psi}}. \quad (13.25)$$

Ma questa relazione può essere scritta

$$v = \sqrt{\frac{Qq}{m\psi}} = \frac{\frac{Q}{\psi^2}}{\sqrt{\frac{Q}{q}} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}} = \frac{\frac{Q}{\psi^2}}{\sqrt{\frac{Q}{q}} \sqrt{\frac{m\psi}{\psi^4}}} = \frac{\frac{Q}{\psi^2}}{\frac{\sqrt{Qm\psi/q}}{\psi^2}} = \frac{\frac{Q}{\psi^2}}{\frac{\mathcal{K}'}{\psi^2}} = \frac{Q}{\mathcal{K}'} = \frac{E}{B}. \quad (13.26)$$

In essa si riconosce chiaramente al numeratore il campo elettrico, già dato per scontato all'inizio, e al denominatore, l'auto induzione magnetica che indissolubilmente lo accompagna²¹. Autoinduzione che, a sua volta, coincide esattamente con il solo campo magnetico B , da applicare alla particella dotata di velocità v , affinché essa percorra la stessa orbita dettata dal solo campo elettrico. Infatti, nell'ipotesi dell'esistenza del solo campo magnetico avremo

$$qvB = qv \sqrt{\frac{Q}{q}} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} = \frac{mv^2}{\psi} \quad (13.27)$$

dalla quale si ha ugualmente che

$$v = \sqrt{\frac{Qq}{m\psi}}. \quad (13.28)$$

Nel caso gravitazionale (presupponendo solo l'esistenza del campo newtoniano centrale), si avrà ugualmente

$$v = \sqrt{\frac{GMm}{m\psi}} = \frac{\sqrt{GMm}}{\psi^2} = \frac{\sqrt{GMm}}{\psi^2} = \frac{\sqrt{GMm}}{\psi^2} = \frac{\check{G}}{B_G} \quad (13.29)$$

relazione dalla quale si evince anche l'esistenza di un'induzione magneto-gravitazionale. Si osserva infine che, nel sistema MKSA, la (13.26) si scrive

$$v = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\psi^2}}{\sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{q}} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}}} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\psi^2}}{\sqrt{\frac{Qm\psi}{4\pi\epsilon_0 q}} \frac{1}{\psi^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\mathcal{K}'} = \frac{E}{B}. \quad (13.30)$$

²¹ Si nota inoltre che la massa magnetica non è fissa, ma è funzione della distanza e quindi della velocità della particella.

14 Superconduttività e Momento di Cooper

Abbiamo visto, nel caso dell'atomo di idrogeno, come la formula

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{m\psi}} \tag{14.1}$$

possa scriversi

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{m\psi}} = \frac{\frac{e}{\psi^2}}{\sqrt{\frac{m}{\psi^3}}} = \frac{E}{B} \tag{14.2}$$

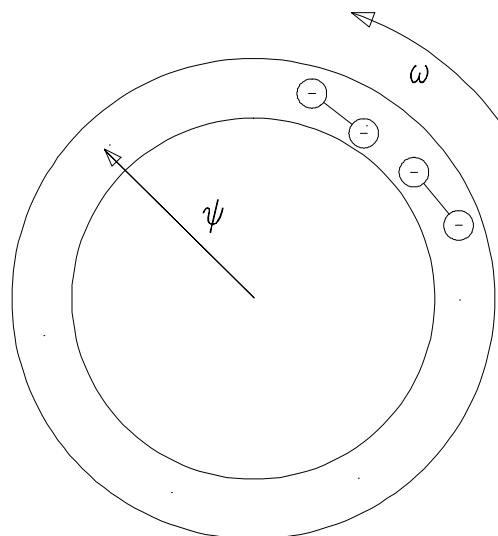
ed è facile rendersi conto che tra gli infiniti modi matematici di scrivere la (14.1), l'unico che abbia un senso fisico è quello riportato nell'equazione (14.2). D'altra parte è ben noto che una carica che accelera in un campo elettrico produce anche un campo magnetico indotto. Abbiamo anche visto che la fisica moderna trascura questo campo magnetico (ad esempio Bohr). Adesso vogliamo dimostrare come dalla relazione

$$B = \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} \tag{14.3}$$

si possa giungere, per l'atomo di idrogeno, alla formula di Cooper, che notoriamente è

$$\vec{B} = -2 \frac{m}{e} \vec{\omega}. \tag{14.4}$$

Detta formula è relativa al campo magnetico generato da una coppia di elettroni (Coppia di Cooper) in un anello di un super conduttore, anello di raggio ψ , che ruota con una velocità angolare ω , così come indicato in figura.



Se un solo elettrone ruota con la detta velocità angolare e se è vera la formula secondo la quale

$$B = \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} \tag{14.5}$$

allora, per esso, nel caso dell'atomo di idrogeno, dobbiamo pervenire ad una relazione analoga alla (14.4). Sotto certi aspetti, l'elettrone sull'orbita di Bohr, è una carica che ruota continuamente, spontaneamente ed indefinitamente sulla data orbita e quindi l'elettrone nell'atomo di idrogeno è perfettamente paragonabile alla corrente spontanea che si ha in un superconduttore.

Dalla (14.5) si ha

$$B = \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} = \sqrt{\left(\frac{m}{e}\right)^2 \frac{e^2}{m\psi^3}} = \frac{m}{e} \sqrt{\frac{e^2}{m\psi^3}} = \frac{m}{e} \omega \tag{14.6}$$

da cui si deduce, per l'unico elettrone dell'atomo di idrogeno, che

$$B = \frac{m}{e} \omega . \tag{14.7}$$

E' subito evidente che dalla relazione (14.4) di Cooper, si ha un modo macroscopico per misurare il valore del rapporto e/m . Infatti

$$\frac{e}{m} = \frac{2\omega}{B} . \tag{14.8}$$

L'esistenza di una induzione magnetogravitazionale sembra essere avvalorata dai recenti lavori sperimentali [11,12].

15 Gravità e campi elettromagnetici – Relazioni tra i sistemi di misura

La carica elettrogravitazionale

Nel sistema c.g.s. si ha l'identità

$$\frac{GMm}{\psi^2} = \frac{N^2 e^2}{\psi^2} \tag{15.1}$$

dalla quale si deduce che

$$N = \frac{\sqrt{GMm}}{e} \tag{15.2}$$

e si ha che la carica elettrogravitazionale è data da

$$Q_{c.g.s.} = \sqrt{GMm} . \tag{15.3}$$

Nel caso del sistema Sole-Terra si ha

$$Q_{c.g.s.} = \sqrt{6.67 \times 10^{-8} \times 1989 \times 10^{30} \times 5.976 \times 10^{27}} = 8.904 \times 10^{26} [Fr.] \quad (15.4)$$

Nel sistema M.K.S. si ha invece

$$\frac{G.M.m.}{\psi^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{N^2 e^2}{\psi^2} \quad (15.5)$$

da cui segue che

$$Q_{M.K.S.} = \sqrt{4\pi\epsilon G.M.m.} = \sqrt{4\pi\epsilon \frac{G}{1000} \frac{M}{1000} \frac{m}{1000}} = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon}{1000^3}} \sqrt{G.M.m.} = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon}{1000^3}} Q_{c.g.s.} \quad (15.6)$$

e quindi si passa dal sistema c.g.s. al sistema M.K.S. con la relazione

$$Q_{M.K.S.} = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon}{1000^3}} Q_{c.g.s.} = \frac{1}{10} \sqrt{1.2566 \times 10^{-6} \times \epsilon} Q_{c.g.s.} = \frac{Q_{c.g.s.}}{10 \times 2.998 \times 10^8} \cong \frac{1 \times 10^{-9}}{3} Q_{c.g.s.}, \quad (15.7)$$

vedi anche tabella di conversione. Nel caso del sistema Sole -Terra si ha quindi

$$Q_{M.K.S.} = \frac{1 \times 10^{-9}}{3} Q_{c.g.s.} = 2.96 \times 10^{17} [C]. \quad (15.8)$$

D'altra parte si ha anche più direttamente

$$Q_{M.K.S.} = \sqrt{4\pi\epsilon G.M.m.} = 2.96 \times 10^{17} [C]. \quad (15.9)$$

Il campo elettrogravitazionale

Nel sistema c.g.s. si ha

$$E_{c.g.s.} = \frac{Q_{c.g.s.}}{\psi^2} = \frac{\sqrt{G.M.m.}}{\psi^2}. \quad (15.10)$$

Nel sistema M.K.S. si ha

$$E_{M.K.S.} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_{M.K.S.}}{\psi^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\sqrt{4\pi\epsilon G.M.m.}}{\psi^2}. \quad (15.11)$$

Poiché è

$$G = \frac{G}{1000}, M = \frac{M}{1000}, m = \frac{m}{1000}, \psi = \frac{\psi}{100} \quad (15.12)$$

si ottiene anche che

$$E_{M.K.S.} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\sqrt{4\pi\epsilon G.M.m.}}{\psi^2} = \sqrt{\frac{100^4}{4\pi 1000^3 \epsilon}} \frac{\sqrt{G.M.m.}}{\psi^2} \quad (15.13)$$

e quindi

$$E_{M.K.S.} = \sqrt{\frac{100^4}{4\pi 1000^3 \varepsilon}} \frac{\sqrt{GMm}}{\psi^2} = \sqrt{\frac{1}{\frac{4\pi 10}{100^4} \times 1 \times 10^8 \varepsilon}} \frac{\sqrt{GMm}}{\psi^2} = \frac{1}{1 \times 10^4} \sqrt{\frac{1}{1.256 \times 10^{-6} \times \varepsilon}} \frac{\sqrt{GMm}}{\psi^2} \quad (15.14)$$

oppure

$$E_{M.K.S.} = \frac{2.998 \times 10^8 \sqrt{GMm}}{1 \times 10^4 \psi^2} \approx 3 \times 10^4 E_{c.g.s.} \quad (15.15)$$

e ciò è quanto si ottiene anche dalla Tabella in appendice.

Campo magnetogravitazionale

Il campo di induzione magnetica può essere definito [6, pag. 189] dall'espressione

$$B = \frac{F_{\perp}}{Qv} \quad (15.16)$$

Pertanto nel sistema c.g.s. si ha

$$B_{c.g.s.} = \frac{F_{\perp}}{Qv} = \frac{GMm}{\psi^2} \frac{1}{\sqrt{GMm}} \frac{1}{\sqrt{\frac{GM}{\psi}}} = \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} \quad (15.17)$$

Nel sistema M.K.S. parimenti si ha

$$B_{M.K.S.} = \frac{F_{\perp}}{Q_{M.K.S.} v} = \frac{G, M, m}{\psi^2} \frac{1}{\sqrt{4\pi \varepsilon G, M, m}} \frac{1}{\sqrt{\frac{G, M,}{\psi}}} = \sqrt{\frac{m'}{4\pi \varepsilon \psi^3}} \quad (15.18)$$

Quindi si ha

$$B_{M.K.S.} = \sqrt{\frac{m'}{4\pi \varepsilon \psi^3}} = \sqrt{\frac{100^3}{4\pi \varepsilon 1000}} \sqrt{\frac{m}{\psi^3}} = \sqrt{\frac{100^3}{4\pi \varepsilon 1000}} B_{c.g.s.} \quad (15.19)$$

Questa formula può essere scritta

$$B_{M.K.S.} = \sqrt{\frac{100^3}{4\pi \varepsilon 1000}} B_{c.g.s.} = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{1}{1.256 \times 10^{-6} \varepsilon}} B_{c.g.s.} = \frac{1}{100} 2.998 \times 10^8 B_{c.g.s.} \quad (15.20)$$

o anche

$$B_{M.K.S.} = \frac{1}{100} 2.998 \times 10^8 B_{c.g.s.} \cong 3 \times 10^6 \times B_{c.g.s.} \quad (15.21)$$

e ciò conformemente ai valori dati dalla Tabella in appendice.

Riassumendo, si ha la seguente tabella

	c.g.s.	M.K.S.	
Q_G	\sqrt{GMm}	$\sqrt{4\pi\epsilon GMm}$	
E_G	$\frac{\sqrt{GMm}}{\psi^2}$	$\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\sqrt{4\pi\epsilon GMm}}{\psi^2}$	(15.22)
B_G	$\sqrt{\frac{m}{\psi^3}}$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{m}{\psi^3}}$	

E' possibile verificare, anche nel sistema M.K.S., che

$$v = \frac{E_G}{B_G} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\sqrt{4\pi\epsilon GMm}}{\psi^2}}{\sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{m}{\psi^3}}} = \sqrt{\frac{GM}{\psi}} \quad (15.23)$$

e che

$$F = Q\vec{v} \wedge \vec{B} = \sqrt{4\pi\epsilon GMm} \sqrt{\frac{GM}{\psi}} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{m}{\psi^3}} = G \frac{Mm}{\psi^2}. \quad (15.24)$$

Il vettore di Poynting elettrogravitazionale, energia per unità di area e di tempo, sarà dato da

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\sqrt{4\pi\epsilon GMm}}{\psi^2} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{m}{\psi^3}} = \frac{1}{4\pi} \frac{mC^2}{\psi^3} \sqrt{\frac{GM}{\psi}} = \frac{1}{4\pi} \frac{mC^2}{\psi^2} \frac{1}{T} = \frac{1}{4\pi} \frac{mC^2}{\psi^2} v. \quad (15.25)$$

La potenza che attraversa una sfera di raggio ψ è pari a

$$\vec{S}_A = \frac{A}{4\pi} \frac{mC^2}{\psi^2} \frac{1}{T} = mC^2 v = mC^2 \sqrt{\frac{GM}{4\pi^2\psi^3}}. \quad (15.26)$$

Bibliografia

- [1] C. Santagata **La nuova soluzione della Catastrofe ultravioletta ...** www.carlosantagata.it
- [2] C. Santagata **Fisica e Ingegneria Sismica** www.carlosantagata.it
- [3] C. Santagata **Legami tra Macro e Microcosmo** www.carlosantagata.it
- [4] H. Kangro **Early History Planck's Radiation Law** Taylor & Francis LTD – London (1976)
- [5] C. Santagata **Nuove Relazioni quantistiche (Relese II)** www.carlosantagata.it
- [6] R. Resnick D. Halliday **Fisica II** Casa Editrice Ambrosiana (1970)
- [7] Christopher J. Isham – Abdus Salam **Gravitazione ed elettrodinamica quantistica** Scienza e tecnica (1973) Annuario EST Mondadori pag. 78
- [8] C. Santagata **Critica alla Meccanica delle Vibrazioni .. quantizzazione delle Onde gravitazionali** www.carlosantagata.it
- [9] C. Santagata **Indications given by Classical Mechanics on the problem of Quantization on Gravitational Field**, lavoro gentilmente collocato nel novembre del 1982 dal Nobel Abdus Salam nella sala di lettura della **S.I.S.S.A.** di Trieste. In questa nota si giunge alla conclusione che anche per il campo gravitazionale, analogamente a quanto avviene per l'atomo di idrogeno nel quale si ha

$$R_n = \frac{e^2}{mC^2} 137^2 n^2 = R_e 137^2 n^2,$$

si può scrivere la relazione

$$R_n = \frac{GMm}{mC^2} \theta^2 n^2$$

dove θ è l'inverso della costante di accoppiamento gravitazionale ed n è un numero intero. Nella nota non si era in grado di precisare che $\theta = \frac{C}{v}$ e che la precedente relazione riguardava la condizione di multirisonanza tra un dipolo gravitazionale e un'onda gravitazionale. Anche dal confronto delle due relazioni precedenti si vede che l'interazione elettromagnetica si estende a quella gravitazionale quando si ammette che, in gravità, la carica elettrica è pari a $q = \sqrt{G M m}$.

- [9] C. Santagata **Un insospettabile connessione tra Macro e Microcosmo** www.carlosantagata.it
- [10] R. Capelletti **Fisica dei solidi** Vol. II ISEDI
- [11] E. Podkletnov, G. Modenese **Impulsive Gravity Generator Based on Charged $YBa_2Cu_3O_{7-y}$ Superconductor with Composite Crystal Structure** arXiv:physics/0108005 v2 30 Aug 2001
- [12] M. Tajmar¹, F. Plesescu¹, K. Marhold¹ & C. J. de Matos² **Experimental Detection of Gravitomagnetic London Moment** ¹ Space Propulsion, ARC Seibersdorf research GmbH, A-2444 Seibersdorf, ² ESA-HQ, European Space Agency, 8-10 rue Mario Nikis, 75015 Paris, France

Appendice

Pagina tratta dal testo di Hans Kangro **Early History of Planck’s Radiation Law**, Taylor & Francis LTD – London 1976

Max Planck’s investigations on radiation

129

A fresh point of view concerns damping caused by emitted radiation, analogous to damping caused by resistance in conductors or by friction. Planck stressed the fact treatment of damping caused by emitted radiation had been neglected almost entirely by previous writer. On the other hand it is never to be neglected for “electrical vibration” (“**maximum of resonance**” of resonator) (Planck 1896, 152-3). If the damping caused by loss of Joule heat is left out of account, then the principle of the conservation of energy holds, which “is by far the most important property of [pure] damping by radiation”, called by him “conservative damping” in contrast to “consumptive damping” by friction (Planck 1896,154). Planck’s real purpose now comes to light: conservation of energy corresponds to “conservation actions”; the study of it therefore opens the prospect “ of the possibility of a general explanation of irreversible processes by conservative actions – a problem with which theoretical physical research is daily more urgently confronted. However, further consideration of this idea must be reserved for other investigations” (Planck 1896, 154;see Klein 1966, 25). This was probably about the time that Wien finally gave expression to the radiation law (see page 85). The problem of irreversible processes, which interested Planck from the time of his doctoral work of 1878-9, was behind the theoretical investigations on radiation. The two publications of 1895 and 1896 on **electromagnetic absorption and emission** clearly also belong to a more comprehensive and far-reaching research planned by him (see Klein 1966, 25).

Planck’s results during 1896 were: (1) A formula for the moment of an electrical dipole referred to the spherical field surrounding a **resonator** similar to the equation for vibration with frictional damping (Planck 1896, 164;⁽¹²⁷⁾)

(¹²⁷)

$$\left\{ \begin{array}{l} Lf'' + \frac{2K}{3C^3L} f' + Kf = Z_0' \\ \text{with} \\ U = \frac{1}{2} Kf^2 + \frac{1}{2} Lf'^2 \end{array} \right.$$

f = electrical moment with the physical dimension $\sqrt{F} \times l^2$ in cgs-system (F=force; l=path);

Z_0' =component of the outer primary wave “passing through the **resonator**”;

K, L = constants;

$$K = \frac{16\pi^4}{3 C^3 \sigma \tau_0^3} \quad \text{and} \quad L = \frac{4\pi^2}{3 C^3 \sigma \tau_0};$$

C = velocity of electromagnetic waves;

σ =damping constant;

where U is the energy “of an electromagnetic system in simple vibration in which electrical and magnetic energy are continuously converted one into other”, i.e., the energy surrounding the resonator (Planck 1896, 161). Planck used the terms “**resonator**” and “oscillator” simultaneously (Planck 1896, 166).

Tab. XII - PRINCIPALI UNITÀ ELETTROMAGNETICHE

Grandezza	Sistema CGS _{em} (cm, g _m , sec; ε ₀ = 1, γ ₀ = 1)		Sistema CGS _{em} (cm, g _m , sec; μ ₀ = 1, γ ₀ = 1)		Sistema MKSA (m, kg _m , sec, A; γ ₀ = 1)		Rapporti fra unità	
	Dimensioni	Unità	Dimensioni	Unità	Dimensioni	Unità	$\frac{\text{unità CGS}_{em}}{\text{unità MKSA}}$	$\frac{\text{unità CGS}_{em}}{\text{unità MKSA}}$
Capacità	l	cm ⁽¹⁾	$l^{-1}t^2$	ab F	$l^{-2}m^{-1}t^4i^2$	farad (F)	c^2	10^9
Carica elettrica	$l^{3/2}m^{1/2}t^{-1}$	franklin	$l^{1/2}m^{1/2}$	ab C	ti	coulomb (C)	c	$10^{-9}/3$
Conduttanza	lt^{-1}	stat S	$l^{-1}t$	ab S	$l^{-2}m^{-1}t^3i^2$	siemens (S)	c^2	$10^{-11}/9$
Conduttività	t^{-1}	stat S · m ⁻¹	$l^{-2}t$	ab S · m ⁻¹	$l^{-3}m^{-1}t^3i^2$	S · m ⁻¹	c^2	$10^{-9}/9$
Costante dielettrica del vuoto, ε ₀	adimens.; = I	—	$l^{-2}t^2$	ab F · m ⁻¹	$l^{-3}m^{-1}t^4i^2$	F · m ⁻¹	c^2	$(36\pi \cdot 10^9)^{-1}$
Costante dell'elettromagnetismo, γ ₀	adimens.; = I	—	adimens.; = I	—	adimens.; = I	—	I	I
Densità di corrente	$l^{-1/2}m^{1/2}t^{-2}$	stat A · m ⁻²	$l^{-3/2}m^{1/2}t^{-1}$	ab A · m ⁻²	$l^{-2}i$	A · m ⁻²	c	$10^{-5}/3$
Energia elettrica	$l^2m t^{-2}$	erg	$l^2m t^{-2}$	erg	$l^2m t^{-2}$	joule (J)	I	10^{-7}
Flusso d'induzione magnetica	$l^{1/2}m^{1/2}$	stat Wb	$l^{3/2}m^{1/2}t^{-1}$	maxwell (Mx)	$l^2m t^{-2}i^{-1}$	weber (Wb)	c^{-1}	$3 \cdot 10^2$
Induttanza (auto, mutua)	$l^{-1}t^2$	stat H	l	cm ⁽³⁾	$l^2m t^{-2}i^{-2}$	henry (H)	c^{-2}	$9 \cdot 10^{11}$
Induzione elettrica	$l^{-1/2}m^{1/2}t^{-1}$	stat C · m ⁻²	$l^{-3/2}m^{1/2}$	ab C · m ⁻²	$l^{-2}ti$	C · m ⁻²	c	$10^5/4\pi$
Induzione magnetica	$l^{-3/2}m^{1/2}$	stat T	$l^{-1/2}m^{1/2}t^{-1}$	gauss (Gs)	$mt^{-3}i^{-1}$	tesla (T) ⁽⁴⁾	c^{-1}	$3 \cdot 10^6$
Intensità di campo elettrico	$l^{-1/2}m^{1/2}t^{-1}$	stat V · m ⁻¹	$l^{1/2}m^{1/2}t^{-2}$	ab V · m ⁻¹	$lmt^{-3}i^{-1}$	V · m ⁻¹	c^{-1}	$3 \cdot 10^4$
Intensità di campo magnetico	$l^{1/2}m^{1/2}t^{-2}$	stat A · m ⁻¹	$l^{-1/2}m^{1/2}t^{-1}$	oersted (Oe)	$l^{-1}i$	A ⁽²⁾ · m ⁻¹	c	$10^{-7}/12\pi$
Intensità di corrente	$l^{3/2}m^{1/2}t^{-2}$	stat A	$l^{1/2}m^{1/2}t^{-1}$	ab A	i	ampere (A)	c	$10^{-9}/3$
Massa magnetica	$l^{1/2}m^{1/2}$	stat Wb	$l^{3/2}m^{1/2}t^{-1}$	maxwell (Mx)	$l^2m t^{-2}i^{-1}$	weber (Wb)	c^{-1}	$12\pi \cdot 10^2$
Momento elettrico	$l^{3/2}m^{1/2}t^{-1}$	stat C · m	$l^{3/2}m^{1/2}$	ab C · m	$l^2m t^{-2}i^{-1}$	C · m	c	$10^{-11}/3$
Momento magnetico	$l^{3/2}m^{1/2}$	stat Wb · m	$l^{3/2}m^{1/2}t^{-1}$	ab Wb · m	$l^2m t^{-2}i^{-1}$	Wb · m	c^{-1}	$4\pi \cdot 10^{-10}$
Permeabilità magnetica del vuoto, μ ₀	$l^{-2}t^2$	stat H · m ⁻¹	adimens.; = I	—	$lmt^{-2}i^{-2}$	H · m ⁻¹	c^{-2}	$4\pi \cdot 10^{13}$
Potenza elettrica	$l^2m t^{-3}$	erg · sec ⁻¹	$l^2m t^{-3}$	erg · sec ⁻¹	$l^2m t^{-3}$	watt (W)	I	10^{-7}
Potenziale elettrico, forza elettromotrice	$l^{1/2}m^{1/2}t^{-1}$	stat V	$l^{3/2}m^{1/2}t^{-2}$	ab V	$l^2m t^{-3}i^{-1}$	volt (V)	c^{-1}	$3 \cdot 10^8$
Potenziale magnetico, forza magnetomotrice	$l^{3/2}m^{1/2}t^{-2}$	stat A	$l^{1/2}m^{1/2}t^{-1}$	gilbert (Gb)	i	amperspira A ⁽²⁾	c	$10^9/12\pi$
Resistenza	$l^{-1}t$	stat Ω	lt^{-1}	ab Ω	$l^2m t^{-3}i^{-2}$	ohm (Ω)	c^{-2}	$9 \cdot 10^{11}$
Resistività	t	stat Ω · m	l^2t^{-1}	ab Ω · m	$l^2m t^{-3}i^{-2}$	Ω · m	c^{-2}	$9 \cdot 10^9$
Riluttanza	lt^{-2}	stat A · H ⁻¹	l^{-1}	ab A · H ⁻¹	$l^{-2}m^{-1}t^2i^2$	A ⁽²⁾ · H ⁻¹	c^2	$10^{-11}/36\pi$

(1) meglio: cm di capacità — (2) Anche: Asp
(3) meglio: cm di induttanza — (4) Già: Wb · m⁻²