

## **Sull'equilibrio dei corpi elastici**

### **Il Principio dell'Inversione del Segno (P.I.S.)**

### Un Principio per l'equilibrio delle strutture elastiche

E' possibile enunciare un semplice Principio per determinare la configurazione di equilibrio di una qualsiasi struttura elastica o deformabile. Trattandosi di un Principio è opportuno precisare che esso deve essere chiaro ed evidente in sé e che quindi non richiede alcuna dimostrazione, così come vorrebbe invece un Teorema.

Per enunciarlo ricorriamo ad un esperimento immediato ed intuitivo. Consideriamo un elastico con costante K, soggetto ad un peso P (fig.1). La forza che tale elastico esplica quando è soggetto ad un allungamento x è data dalla nota relazione

$$F = K x . \tag{1.1}$$

Evidentemente sotto l'azione del carico P si raggiungerà l'equilibrio allorquando l'elastico si sarà allungato di una lunghezza pari a

$$x = \overline{AB} = P / K . \tag{1.2}$$

Facciamo riferimento alla fig. 1.

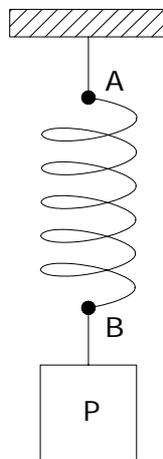


Fig. 1

Supponiamo di applicare il peso P al detto elastico a deformazione nulla e cioè quando il punto B coincide col punto A. In tal caso l'elastico non ha ancora esplicito alcuna reazione e quindi la nostra mano (vincolo ausiliario esterno), che impedisce qualsiasi deformazione della molla, avverte tutto il peso P del corpo, esplicitando un'azione rivolta verso l'alto pari a - P. Se accompagniamo, sempre con la nostra mano, il peso P durante tutta la sua discesa, in ogni punto di questo tragitto avvertiamo una forza che diminuisce man mano e che diventa nulla nel momento in cui la distanza AB diventa uguale a P/K. Se invece costringiamo con la nostra mano il peso P ad oltrepassare il detto punto di equilibrio esercitiamo una forza che tende a crescere ma questa volta essa è rivolta verso il basso.

Possiamo esprimere la variabile azione R della nostra mano (vincolo ausiliario esterno) con la relazione

$$R = -P + Kx = -K\overline{AB} + Kx = K(x - \overline{AB}). \quad (1.3)$$

Dalla (1.3) si vede che per  $x < \overline{AB}$  la reazione della nostra mano è rivolta verso l'alto; la stessa si annulla per  $x = \overline{AB}$  ed è invece rivolta verso il basso quando  $x > \overline{AB}$ .

Dunque la condizione di equilibrio è caratterizzata dall'annullarsi della reazione del vincolo esterno (in questo caso la nostra mano), reazione che si ha in un possibile punto della traiettoria che descrive il peso applicato all'elastico. Si può anche dire che durante il transito di P per il punto di equilibrio si verifica una variazione di segno dell'azione del vincolo esterno ausiliario.

Questa esperienza lascia intuire, almeno in prima istanza, che si possa trovare la configurazione di equilibrio di una generica struttura deformabile spostando per tentativi successivi tutti i suoi punti che subiscono spostamenti e saggiando continuamente le reazioni dei vincoli ausiliari che possiamo pensare applicati a tutti i punti della struttura. E' ovvio che la configurazione di equilibrio della struttura è caratterizzata dall'annullarsi delle dette reazioni vincolari ausiliarie. E' anche evidente che la ricerca non mirata e quindi per tentativi di una configurazione che renda nullo il vettore delle dette reazioni dei vincoli ausiliari esterni applicati ai vari punti della struttura sarebbe completamente vana se non fosse possibile escogitare un procedimento che permetta di determinare l'entità (e la direzione) dei vari spostamenti per raggiungere la detta configurazione. Una prima idea potrebbe essere quella di introdurre un opportuno step della deformazione e saggiare l'eventuale corrispondente diminuzione della reazione, ma c'è anche la possibilità di determinare analiticamente l'entità dello spostamento del punto generico nel caso più generale di strutture comunque iperstatiche.

Un primo esempio è suggerito dalla (1.3), metodo che è banale in questo caso ma che può trovare la sua utilità per sistemi elastici iperstatici comunque complessi.

Nel caso della Fig. 1 l'incognita x, nella fase iniziale, può essere considerata nulla. In tal caso la forza applicata dalla nostra mano è pari a  $-K\overline{AB}$ . Per annullare tale reazione occorre spostare, nel verso opposto alla forza esplicata, e cioè verso il basso, la nostra mano di una quantità pari a

$$x = -(-K\overline{AB})/K = \overline{AB}. \quad (1.4)$$

Nel caso più complesso di strutture iperstatiche si trova, come vedremo tra poco, una relazione perfettamente analoga alla (1.4) ed anche in questo caso occorre dare uno spostamento che ha la direzione opposta all'azione esplicata dal vincolo ausiliario.

Si può pertanto dire che il metodo che qui si propone consiste essenzialmente in due operazioni consecutive, da applicare ripetutamente fino ad ottenere l'annullamento del vettore reazioni dei vincoli ausiliari e cioè:

1. si assegna un arbitrario vettore degli spostamenti di partenza (che può anche essere nullo) a tutti i punti della struttura che subiranno spostamenti fino a raggiungere la posizione di equilibrio e quindi a tutti i punti non vincolati;

2. con un qualsiasi procedimento della Scienza delle Costruzioni (P.L.V. [3], Metodo delle forze, delle deformazioni [4] etc.) si calcola il vettore reazioni relativo al precedente insieme di spostamenti impressi;
3. si rettifica il precedente vettore spostamenti determinando le variazioni degli spostamenti che annullano il vettore reazioni di cui al punto precedente;
4. si ripetono le operazioni 2 e 3 fino alla convergenza.

La convergenza, nell'ipotesi di una struttura stabile, è assicurata dal fatto intuitivo che se la struttura ha raggiunto la sua configurazione di equilibrio sono nulle tutte le reazioni dei vincoli ausiliari applicati ai nodi della stessa e suscettibili di spostamenti.

Infatti, sempre nell'ipotesi di struttura stabile, supponiamo che un punto della generica struttura abbia raggiunto una certa posizione P. Se questa è una posizione di equilibrio e tentiamo di spostare P in un punto diverso P', nasce una forza di richiamo, tanto più grande quanto maggiore è la stabilità, che tende a ricondurre il punto P' in P. E' quindi anche possibile definire un grado di stabilità. Se nel momento in cui, spostando il punto della struttura da P di equilibrio al punto P', la detta forza di richiamo dovesse essere sempre nulla o addirittura tendere a far aumentare la distanza PP' ci troveremmo evidentemente, nel primo caso, di fronte ad un equilibrio indifferente o, nel secondo, nel caso di struttura instabile.

Un'ulteriore considerazione va fatta. Nell'ipotesi che i punti della generica struttura abbiano raggiunto la configurazione di equilibrio e ci si trovi nel caso di equilibrio stabile, una loro perturbazione ingenera una vibrazione armonica degli stessi, la cui frequenza è proporzionale alla forza di richiamo o al detto grado di stabilità. Infatti per piccoli spostamenti nell'intorno della configurazione di equilibrio la forza stabilizzante può considerarsi ancora direttamente proporzionale allo spostamento stesso e di segno contrario allo spostamento stesso. In ogni caso è possibile rimuovere detta approssimazione.

Consideriamo adesso la seguente figura 2.

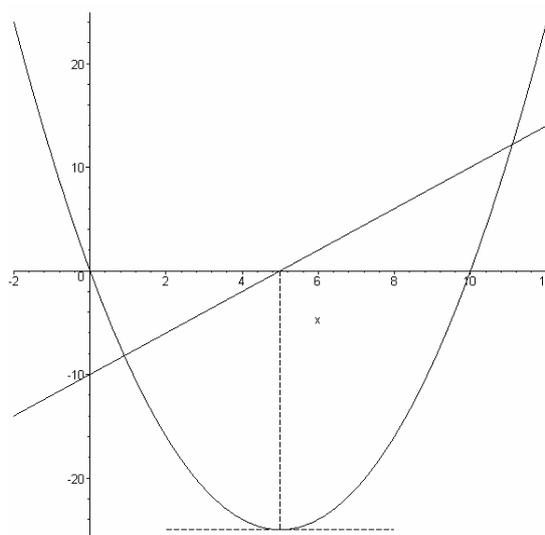


Fig. 2

Sull'ascissa è rappresentato lo spostamento  $x$  della fig. 1. L'equazione (1.3), assumendo  $P=10$  e  $K=2$ , diventa

$$R = -10 + 2x. \quad (1.5)$$

ed è rappresentata dalla retta di equazione (1.5).

Il lavoro compiuto dalla nostra mano è dato

$$L = \int R dx + C \quad (1.6)$$

pertanto, nel caso dell'equazione (1.5), si ha

$$L = -10x + \frac{1}{2}2x^2 \quad (1.7)$$

relazione anch'essa rappresentata in Fig. 2 dalla parabola.

Il lavoro compiuto dalla nostra mano portando il peso  $P$  dal punto  $x = A = 0$  fino al punto di equilibrio  $\bar{x} = \frac{P}{K}$  sarà pari a

$$L_1 = -\frac{1}{2} \frac{P^2}{K} = -\frac{1}{2} \frac{P}{K} P = -\frac{1}{2} P \bar{x}, \quad (1.8)$$

ed è un lavoro negativo in quanto la direzione della forza è contraria allo spostamento (l'angolo tra la forza e lo spostamento è pari a  $180^\circ$  e quindi il  $\cos(180^\circ) = -1$ ). Invece quello compiuto spostando il peso dalla posizione di equilibrio  $\bar{x} = \frac{P}{K}$  alla posizione  $x = 2P/K$  è pari a

$$L_1 = \frac{1}{2} \frac{P^2}{K} \quad (1.9)$$

in quanto la forza applicata è adesso rivolta verso il basso ed è quindi concorde allo spostamento ( $\cos(0^\circ) = 1$ ). Ciò comporta che se si sposta il peso dalla posizione  $x = A = 0$  alla posizione doppia di quella per la quale si ha l'equilibrio il lavoro totale è nullo.

In proposito si possono fare le seguenti semplici considerazioni.

1. Se spostiamo il peso  $P$  dalla sua posizione di equilibrio, lungo la verticale, nasce una forza  $R$  che ha una direzione contraria allo spostamento imposto. Il punto di equilibrio è dunque caratterizzato dal fatto che c'è una inversione di segno di  $R$  (P.I.S.).
2. Il lavoro che si compie spostando simmetricamente il peso  $P$  rispetto al punto di equilibrio, nell'ipotesi di elasticità lineare, è nullo e ciò è dovuto esclusivamente al fatto che la forza, nel detto punto, si inverte. Nel caso di elasticità non lineare la

nullità del lavoro può ritenersi comunque valida in un intorno sufficientemente piccolo del punto di equilibrio.

3. Quanto rilevato al punto 1, nell'ipotesi di elasticità lineare, comporta che il peso  $P$  oscilla armonicamente intorno alla posizione di equilibrio. Infatti se, con un cambiamento del sistema di riferimento, indichiamo con  $u$  lo spostamento del peso  $P$  dalla sua posizione di equilibrio avremo che esso sarà soggetto alla forza di richiamo

$$R = -P + K x = -P + K \left( \frac{P}{K} + u \right) = K u , \tag{1.10}$$

che caratterizza appunto gli oscillatori armonici.

Almeno in questo caso appare superfluo calcolare il lavoro del vincolo ausiliario per poi derivare ed uguagliare a zero questa funzione e ciò al fine di ottenere la condizione di equilibrio che si ha invece direttamente ponendo uguale a zero l'equazione (1.3). Il procedimento di minimizzazione appena accennato, com'è noto, va sotto il nome del gradiente coniugato [5] e viene attualmente usato per sistemi iperstatici di grandi dimensioni.

Da quanto detto appare evidente che la posizione di equilibrio è fortemente se non univocamente caratterizzata dall'inversione di segno che subisce la reazione del vincolo ausiliario quando l'operatore esterno sposta il punto  $B$  d'equilibrio (fig. 1) verso l'alto o verso il basso. E ciò è intuitivamente valido anche per i sistemi isostatici (fig. 3) e può costituire un efficace supporto per rendere più che immediato il Principio dei Lavori Virtuali [3]. Nel caso di fig. 3 l'elastico, che rappresenta il vincolo ausiliario esterno, non risulta sollecitato se la leva è in condizioni di equilibrio. Uno spostamento del punto  $A$ , dovuto al non verificarsi della condizione di equilibrio, comporta una reazione dell'elastico contraria allo spostamento stesso e ciò analogamente al caso già considerato.

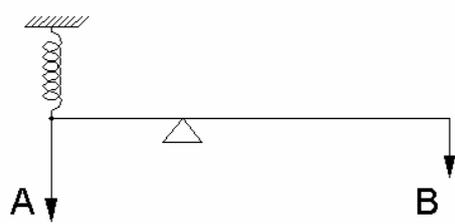


Fig. 3

D'altra parte (v. fig. 2) trovare il valore minimo della funzione lavoro (metodo del gradiente coniugato) o ricercare l'inversione di segno che subisce la reazione vincolare ausiliaria esterna è esattamente la stessa cosa. Anzi, dal punto di vista operativo, è più immediato, una volta determinata la funzione che esprime la reazione del vincolo ausiliario, trovare il punto della sua inversione anziché risalire da quest'ultima al lavoro per poi minimizzare la funzione così ottenuta.

Possiamo dunque concludere, in base alle semplici ed intuitive considerazioni ora esposte, che la configurazione di equilibrio di un qualsiasi sistema sia isostatico che

iperstatico è caratterizzata ed univocamente determinata dall'inversione del segno della reazione dei vincoli ausiliari.

**Sistemi iperstatici – La trave continua.**

Un semplice esempio di applicazione del principio innanzi esposto anche per i sistemi iperstatici può essere costituito dalla soluzione della trave continua. Dalla Scienza delle Costruzioni [1,4] sappiamo che se una trave subisce ai suoi estremi le rotazioni rappresentate in Fig. 4 ed è soggetta ad un carico uniforme,

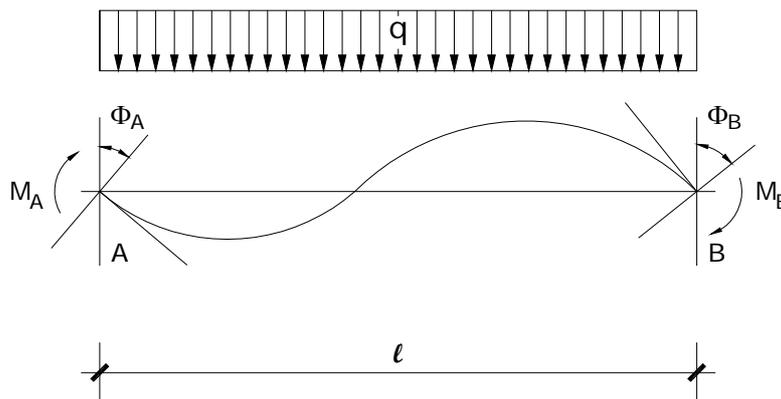


Fig. 4

l'azione che occorre applicare all'estremo A per ottenere la rotazione  $\Phi_A$  della sezione A, dato il detto carico e la rotazione  $\Phi_B$ , è data dalla relazione (si assume positivo l'angolo ed il momento orario)

$$M_A = -\frac{1}{12}ql^2 + 4\frac{EI}{l}\Phi_A + 2\frac{EI}{l}\Phi_B \tag{1.11}$$

Consideriamo adesso un generico appoggio intermedio della trave continua, v. fig. 5.

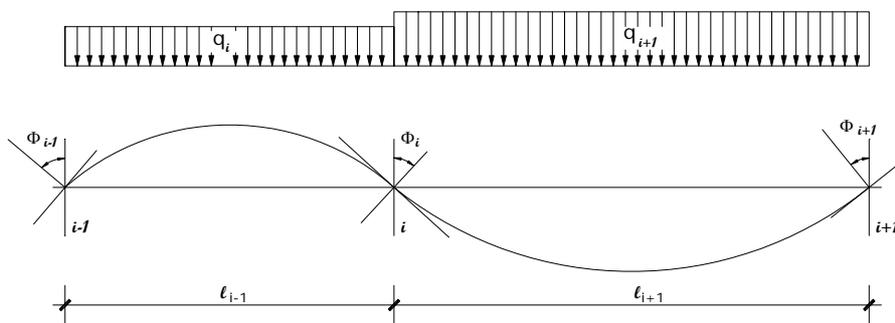


Fig. 5

Siano  $\Phi_i, \Phi_{i-1}, \Phi_{i+1}$  le rotazioni che subisce detta trave sugli appoggi consecutivi (i-1), (i) ed (i+1).

In tal caso, con l'applicazione della (1.11), imponendo la congruenza delle rotazioni delle due sezioni che poggiano nel generico nodo (i), si ottiene il valore del momento  $M_i$  che occorre applicare alla detta generica sezione affinché la stessa, prefissati i valori delle rotazioni  $\Phi_{i-1}$  e  $\Phi_{i+1}$ , ruoti dell'angolo  $\Phi_i$ . Detta azione è data dall'espressione

$$M_i = \frac{1}{12} q_i l_i^2 - \frac{1}{12} q_{i+1} l_{i+1}^2 + 4 \left( \frac{EI_i}{l_i} + \frac{EI_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \Phi_i + 2 \frac{EI_i}{l_i} \Phi_{i-1} + 2 \frac{EI_{i+1}}{l_{i+1}} \Phi_{i+1}. \quad (1.12)$$

Posto

$$\bar{M}_i = \frac{1}{12} q_i l_i^2 - \frac{1}{12} q_{i+1} l_{i+1}^2 \quad (1.13)$$

la (1.12) può essere scritta

$$M_i = \bar{M}_i + 4 \left( \frac{EI_i}{l_i} + \frac{EI_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \Phi_i + 2 \frac{EI_i}{l_i} \Phi_{i-1} + 2 \frac{EI_{i+1}}{l_{i+1}} \Phi_{i+1}. \quad (1.14)$$

Per risolvere il problema della trave continua possiamo partire dall'assunzione iniziale che tutte le rotazioni delle sezioni della trave sui vari appoggi siano nulle. In tal caso è facile calcolare il vettore momento da applicare alle dette sezioni affinché siano rispettate le dette rotazioni iniziali. Ciò si ottiene con la (1.14). In una fase intermedia dell'operazione sul nodo generico  $i$  esplichiamo un'azione pari ad  $M_i$ . E' evidente che possiamo ruotare la detta sezione di un particolare angolo  $\Delta\Phi_i$  affinché venga ad annullarsi l'azione  $M_i$ . Dalla (1.14) si ha che variando l'angolo della sezione considerata della quantità

$$\Delta\Phi_i = - \frac{\bar{M}_i + 2 \left( \frac{EI_i}{l_i} \Phi_{i-1} + \frac{EI_{i+1}}{l_{i+1}} \Phi_{i+1} \right)}{4 \left( \frac{EI_i}{l_i} + \frac{EI_{i+1}}{l_{i+1}} \right)} \quad (1.15)$$

si annulla l'azione esplicata e si ottiene un aggiornamento dell'angolo di rotazione

$$\Phi_i' = \Delta\Phi_i + \Phi_i. \quad (1.16)$$

Questa operazione va fatta su tutte le sezioni e fino a quando si può ritenere trascurabile l'azione da esplicare sul generico nodo attraverso tutti i vincoli ausiliari esterni. E' questo un calcolo che può farsi anche manualmente usando alternativamente la (1.14) e la (1.15).

Il semplice programma in BASIC che segue, che può facilmente essere riscritto in ambiente Windows, risolve una qualunque trave continua procedendo nel modo descritto. Esso è composto di due parti: la prima determina la configurazione di equilibrio della struttura, la seconda consente di eseguire una verifica di stabilità dell'equilibrio in precedenza determinato, così come meglio si dirà in seguito.

```
100 SCREEN 9 'PRIMA PARTE Determinazione della configurazione di equilibrio
110 CLS:INPUT "Numero campate";NN:
120 DIM
Q(NN),L(NN),B(NN),H(NN),II(NN),MINCS(NN+1),MINCD(NN+1),KK(NN+1),KKK(NN+1),FI(NN+2),
MBD(NN+1),MBS(NN+1):PRINT
130 INPUT "Modulo di elasticità";EE
140 INPUT "Coefficiente accelerante";CA
150 INPUT"Trave a sezione costante (s/n)";JK$:PRINT
160 FOR I=1 TO NN:PRINT"Campata N°";I
170 INPUT "Carico [kg/ml]";Q(I):Q(I)=Q(I)/100
180 INPUT "Luce [ml.];L(I):L(I)=L(I)*100
190 IF JK$="s" OR JK$="S" THEN B(I)=30:H(I)=60:GOTO 220
200 INPUT "Base trave [cm]";B(I)
210 INPUT "Altezza trave [cm]";H(I):PRINT
220 NEXT
230 INPUT"Errore (s/n)";E$
240 IF E$="s" OR E$="S" THEN INPUT "Trave N° ?";I ELSE 270
250 INPUT "Carico";Q(I):Q(I)=Q(I)/100:INPUT "Luce";L(I):L(I)=L(I)*100
260 IF JK$="s" OR JK$="S" THEN 230 ELSE INPUT "Base";B(I):INPUT "Altezza";H(I):GOTO 230
270 INPUT "I° campata a sinistra app.0, inc.1 (0/1)?" ;SI:IF SI=0 THEN INPUT "Momento sull'appoggio
sinistro [kgm],positivo se orario";MSS:MINCD(0)=-MSS*100
280 INPUT "Ultima camp. a destra app.0, inc.1 (0/1)?" ;DE:IF DE=0 THEN INPUT "Momento sull'appoggio
destro [Kgm],positivo se orario";MDD:MINCS(NN+1)=-MDD*100
290 INPUT "Errore (s/n)";E$:IF E$="s" OR E$="S" THEN 270
300 ' fine input *****
310 FOR I=1 TO NN ' i è la campata
320 MINCS(I)=-1/12*Q(I)*L(I)^2
330 MINCD(I)=+1/12*Q(I)*L(I)^2
340 II(I)=+1/12*B(I)*H(I)^3
350 KK(I)=II(I)*EE/L(I)
360 NEXT:FOR I=1 TO NN+1:KKK(I)=KK(I-1)+KK(I):NEXT:OPEN"O",#1,"DATI.txt"
370 FOR I=1 TO NN+1 ' i è l'appoggio della trave
380 IF SI=1 AND I=1 THEN 460
390 IF DE=1 AND I=NN+1 THEN 460
400 AAA=AAA+1
410 MBS(I)=+MINCD(I-1)+4*FI(I)*KK(I-1)+2*FI(I-1)*KK(I-1)
420 MBD(I)=+MINCS(I)+4*FI(I)*KK(I)+2*FI(I+1)*KK(I):BBB=MBD(I)+MBS(I)
430 FI(I)=FI(I)-(BBB/4/KKK(I))*CA:PRINT"Iterazione N";AAA
440 PRINT"Node";I;"Angolo";FI(I);"Ms";INT(MBS(I));"Md";INT(MBD(I));"Delta M";INT(BBB)
450 A$=INKEY$:IF A$="" THEN 450
455 PRINT#1,AAA;FI(1),
460 NEXT
470 IF ABS(MBD(NN)+MBS(NN))>.1 GOTO 370 ELSE GOTO 480
480 PRINT:PRINT"Valori definitivi":PRINT"Numero iterazioni";AAA:PRINT
490 FOR I=1 TO (NN+1)
500 MBS(I)=+MINCD(I-1)+4*FI(I)*KK(I-1)+2*FI(I-1)*KK(I-1)
510 MBD(I)=+MINCS(I)+4*FI(I)*KK(I)+2*FI(I+1)*KK(I)
520 PRINT"Node";I;"Angolo";FI(I);"Ms";INT(MBD(I));"Md";INT(MBS(I));"Delta
M";INT(MBD(I)+MBS(I))
*****
530 NEXT:CLOSE#1:SECONDA PARTE Verifica Stabilità
540 INPUT "Numero della sezione";NS
550 INPUT "Rotazione in radianti";FI(NS)
560 INPUT "Correzione (s/n)";A$:IF A$="s" OR A$="S" THEN 540
570 FOR I=1 TO NN ' i è la campata
580 MINCS(I)=-1/12*Q(I)*L(I)^2
```

```

590 MINCD(I)=+1/12*Q(I)*L(I)^2
600 II(I)=+1/12*B(I)*H(I)^3
610 KK(I)=II(I)*EE/L(I)
620 NEXT:FOR I=1 TO NN+1:KKK(I)=KK(I-1)+KK(I):NEXT:AAA=0
630 FOR I=1 TO NN+1 'i è l'appoggio della trave
640 IF SI=1 AND I=1 THEN 460
650 IF DE=1 AND I=NN+1 THEN 460
660 AAA=AAA+1
670 MBS(I)=+MINCD(I-1)+4*FI(I)*KK(I-1)+2*FI(I-1)*KK(I-1)
680 MBD(I)=+MINCS(I)+4*FI(I)*KK(I)+2*FI(I+1)*KK(I):BBB=MBD(I)+MBS(I)
690 FI(I)=FI(I)-(BBB/4/KKK(I))*CA:PRINT"Iterazione N";AAA
700 PRINT"Nodo";I;"Angolo";FI(I);"Ms";INT(MBS(I));"Md";INT(MBD(I));"Delta M";INT(BBB)
710 A$=INKEY$:IF A$="" THEN 710
730 NEXT
740 IF ABS(MBD(NN)+MBS(NN))>.1 GOTO 630 ELSE GOTO 750
750 PRINT:PRINT"Valori definitivi":PRINT"Numero iterazioni";AAA:PRINT
760 FOR I=1 TO (NN+1)
770 MBS(I)=+MINCD(I-1)+4*FI(I)*KK(I-1)+2*FI(I-1)*KK(I-1)
780 MBD(I)=+MINCS(I)+4*FI(I)*KK(I)+2*FI(I+1)*KK(I)
790 PRINT"Nodo";I;"Angolo";FI(I);"Ms";INT(MBD(I));"Md";INT(MBS(I));"Delta
M";INT(MBD(I)+MBS(I))
800 NEXT

```

Le righe 410 e 420 calcolano i momenti a sinistra e destra della sezione generica e quindi il momento totale BBB da applicare ad essa in funzione dei predeterminati angoli  $\Phi_{i-1}, \Phi_i, \Phi_{i+1}$ . La riga successiva 430 calcola poi l'angolo di cui deve ruotare la detta sezione per neutralizzare il momento BBB e lo somma algebricamente all'angolo già ottenuto in precedenza. Detto angolo, come già detto, deve avere il segno opposto al momento da neutralizzare. Sempre nella riga 430 il termine <sup>(1)</sup>

$$\Delta\Phi_i = -\frac{BBB}{4 \times KKK(i)}, \quad (1.17)$$

che consente di valutare l'angolo di cui deve ruotare la sezione affinché venga ad annullarsi il momento espicato dal vincolo ausiliario esterno, può anche essere moltiplicato per un coefficiente CA che accelera la convergenza ma che può anche porsi, in ogni caso, pari all'unità. In effetti è evidente che se le rotazioni dei nodi adiacenti a quello considerato non subissero ulteriori variazioni il detto coefficiente dovrebbe essere posto proprio pari all'unità. Poiché la detta condizione, almeno nella fase iniziale del procedimento, non si verifica perché la condizione di equilibrio è ancora lontana e quindi i nodi adiacenti subiranno ancora sensibili variazioni, è, se si vuole aumentare la velocità di convergenza, necessario porre  $CA = [1.1 - 1.3]$ , almeno nella fase iniziale del procedimento. Ciò produce un sensibile calo del numero di iterazioni per raggiungere l'equilibrio. In ogni caso, se il detto coefficiente lo si pone sempre pari all'unità, la convergenza è comunque sempre assicurata ed è garantita dal fatto che, nella condizione di equilibrio, le azioni dei vincoli ausiliari debbono essere tutte nulle.

Il procedimento termina quando il momento totale BBB sull'ultimo appoggio della trave è uguale o minore di 0.1 Kgcm.

<sup>1</sup> Si noti l'identità formale tra la (1.17) e (1.4).

## **Cenni sulla valutazione del grado di stazionarietà**

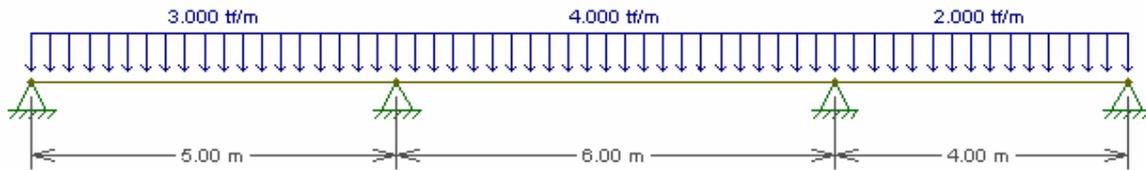
E' questo un argomento che va accuratamente affrontato e che attualmente ha trovato varie soluzioni in criptati e sofisticati software.

La seconda parte del programma permette di perturbare, solo inizialmente, la configurazione di equilibrio raggiunta dalla struttura e quindi consente di saggiare e verificare che essa, dopo un certo numero di iterazioni, abbia la capacità di ritornare nella configurazione di equilibrio innanzi detta. In effetti, con questa parte dell'algoritmo di calcolo si può, ad esempio, modificare a piacimento l'angolo di rotazione d'equilibrio di un nodo qualsiasi o di tutti i nodi e si può verificare con quale velocità di convergenza la struttura recupera di nuovo la configurazione di equilibrio alla quale era pervenuta. E' evidente che con il presupposto di un'elasticità lineare detta verifica è del tutto banale. Invece con l'introduzione di particolari meccanismi e limiti (variazione del modulo di elasticità in funzione della rotazione) si possono ottenere efficaci algoritmi che consentano di determinare sotto quali carichi la struttura in esame assume gradualmente una particolare configurazione che va dalla condizione di un equilibrio stabile, passa per una condizione di equilibrio indifferente fino a toccare l'instabilità, tematica di grande importanza strutturale.

Le righe dal numero 540 al 560 consentono quindi di modificare le rotazioni d'equilibrio delle sezioni sugli appoggi della trave, allontanando a piacimento la struttura dalla detta configurazione. E' possibile verificare che, dopo un certo numero di iterazioni, la struttura riacquista sempre la precedente configurazione di equilibrio, data la presupposta costanza del modulo di elasticità.

**Esempio numerico**

Sia data la trave di sezione costante cm. 30 x cm. 60 con  $E=300.000 \text{ Kg/cm}^2$ .



Il programma da i seguenti risultati

Sezione	Angolo radianti	Momento sinistra [Kgcm]	Momento destra [Kgcm]
1	$3.651754 \times 10^{-4}$	0	0
2	$2.341553 \times 10^{-4}$	-1 165 099	1 165 099
3	$-4.036793 \times 10^{-4}$	-890 470	890 470
4	$3.723056 \times 10^{-5}$	0	0

Lo stesso esempio è stato svolto con il programma **Ftool** i cui risultati sono i seguenti.

Node Results  
Support Reactions:  
 $F_x = 0.00 \text{ tf}$   
 $F_y = 5.17 \text{ tf}$   
 $M_z = 0.000000 \text{ tfm}$

Nodal Displacements:  
 $D_x = 0.000e+000 \text{ mm}$   
 $D_y = 0.000e+000 \text{ mm}$   
 $R_z = -3.652e-004 \text{ rad}$

Node Results  
Support Reactions:  
 $F_x = 0.00 \text{ tf}$   
 $F_y = 22.29 \text{ tf}$   
 $M_z = 0.000000 \text{ tfm}$

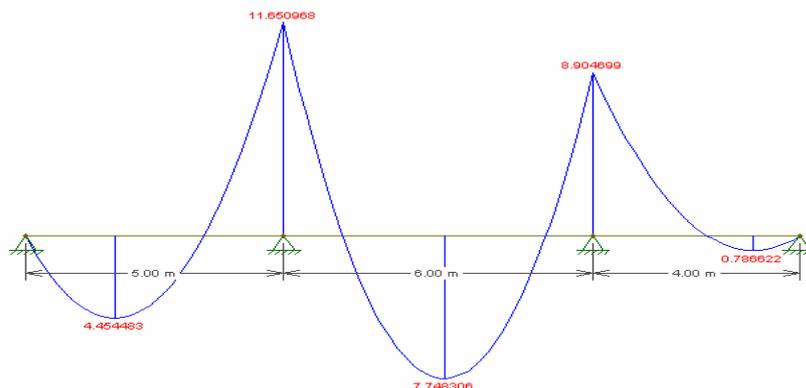
Nodal Displacements:  
 $D_x = 0.000e+000 \text{ mm}$   
 $D_y = 0.000e+000 \text{ mm}$   
 $R_z = -2.342e-004 \text{ rad}$

Node Results  
Support Reactions:  
 $F_x = 0.00 \text{ tf}$   
 $F_y = 17.77 \text{ tf}$   
 $M_z = 0.000000 \text{ tfm}$

Nodal Displacements:  
 $D_x = 0.000e+000 \text{ mm}$   
 $D_y = 0.000e+000 \text{ mm}$   
 $R_z = 4.037e-004 \text{ rad}$

Node Results  
Support Reactions:  
 $F_x = 0.00 \text{ tf}$   
 $F_y = 1.77 \text{ tf}$   
 $M_z = 0.000000 \text{ tfm}$

Nodal Displacements:  
 $D_x = 0.000e+000 \text{ mm}$   
 $D_y = 0.000e+000 \text{ mm}$   
 $R_z = -3.723e-005 \text{ rad}$



Tenuto conto della diversa convenzione circa il segno degli angoli e del fatto che questo programma usa, per le forze, le tonnellate e, per i momenti, le tonnellate x metro, si può verificare che i due algoritmi danno gli stessi risultati.

### **Brevi considerazioni storiche**

Il metodo di Cross (delle forze) e quello di Kani (delle deformazioni) hanno alleviato, per un certo periodo di tempo, il lavoro dello strutturista. Con l'avvento del computer si è avuto il sopravvento del metodo delle deformazioni. Il metodo che qui si è appena esposto, sotto questo aspetto, consiste invece in una continua operazione di feedback tra i due procedimenti anzidetti, seguendo una intuitiva condizione di equilibrio caratterizzata dall'annullarsi delle reazioni dei vincoli ausiliari. L'aggiornamento continuo del modulo di elasticità attraverso una legge sperimentale, perfezionando il semplice programma proposto, permette di stabilire quello che potrebbe definirsi grado di stabilità della struttura in esame, nel senso già detto.

Il Collega che abbia frequentato il Politecnico di Napoli e che quindi abbia avuto modo di conoscere il metodo di Pagano [2], ricorderà senz'altro la problematica della convergenza dei telai con ritti molto rigidi rispetto ai traversi, risolta con l'operazione della rotazione forzata dei nodi di uno stesso piano, che aumenta la velocità di convergenza del detto procedimento. Questa intuizione sembra trovare un rinnovato riscontro in questo contesto.

Lo scrivente, appunto in questa occasione, sente il dovere di esprimere tutta la sua riconoscenza al Prof. Michele Pagano, oltre che per i suoi già riconosciuti meriti scientifici, anche e soprattutto per aver infuso nella nutritissima schiera dei suoi allievi di un tempo un'acuta sensibilità strutturale, unica e sicura guida nel nostro difficile e complesso lavoro.

### **Bibliografia**

- [1] O. Belluzzi **Scienza delle Costruzioni** vol. 2 Zanichelli
- [2] M. Pagano **Sul calcolo dei telai a nodi spostabili** Giornale del Genio Civile 1958
- [3] D. Capecchi **Storia del Principio dei lavori Virtuali** La Meccanica Alternativa Hevelius 2002
- [4] C. Santagata **Un metodo di calcolo per le strutture monodimensionale piane** 1982 [www.carlosantagata.it](http://www.carlosantagata.it)
- [5] M. Capurso **Introduzione al calcolo automatico delle strutture** Zanichelli 1977