

# Legami tra macro e microcosmo

## I<sup>a</sup> Parte

Carlo Santagata

Via Giorgio Perlasca, 9

81055 S. Maria C.V. (CE) – Italy

May 2005

## Abstract

Nel lavoro [6] si è già mostrato il legame esistente tra alcune grandezze macroscopiche quali la velocità del suono ed il modulo di elasticità di Young di una determinata sostanza con alcune grandezze atomiche della stessa come la carica dell'elettrone, la massa dell'atomo e la distanza intermolecolare. In questa sede le dette relazioni vengono generalizzate e si trovano analoghi legami per i coefficienti di dilatazione termica e la tensione superficiale dei liquidi con le stesse grandezze atomiche. Ciò sembra implicare che i vari stati coattivi della materia siano essenzialmente dovuti a forze ioniche che si manifestano anche all'esterno dei corpi stessi ed in sintonia con una nota esperienza di Ettore Majorana.

# Introduzione

Nel lavoro [6] si è già posto in evidenza che alcune proprietà macroscopiche della materia sono riconducibili a grandezze atomiche della stessa e viceversa. Qui si aggiungono ulteriori sviluppi. Per dare un quadro organico della ricerca riportiamo *summa capite* i punti di partenza già delineati nel citato lavoro.

Una critica che si può muovere, ad esempio, alla teoria dell'elasticità e, più in generale, al concetto di campo può essere la seguente. Normalmente, presa in esame una certa sostanza, si ammette che una sua qualsiasi porzione  $(\Delta x)^3$  possa subire un illimitato numero di ingrandimenti senza che la sua struttura, da un certo punto in poi, possa drasticamente mutare, svelando finalmente l'esistenza del reticolo atomico cristallino che la costituisce. Ciò comporta che importanti formule di carattere macroscopico (ad esempio la nota relazione che permette di calcolare la velocità del suono in seno alla materia) restino tali e non vengono invece a tramutarsi in relazioni che riguardano le strutture ed i legami interatomici e molecolari che coerentemente, da un certo punto in poi, dovrebbero sostituire il presupposto continuum <sup>(1)</sup>. Tanto per fissare le idee, per ottenere nota relazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = C^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (1)$$

relativa alla propagazione della deformazione elastica in un solido consideriamo un volumetto infinitesimo di materia con una determinata densità ed applichiamo la seconda legge della dinamica. Nulla vieta però di considerare, tanto per fare un esempio molto concreto, il caso del cloruro di sodio ( $NaCl$ ) e di schematizzarlo, almeno per il momento, come un treno di masse  $Na^+$  e  $Cl^-$  collegate da una carica elettrica elementare (v. fig. 1).

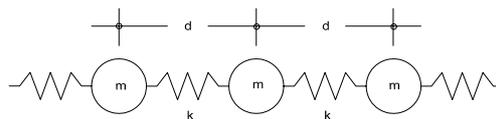


Fig. 1

In tal caso si ha che per la massa generica <sup>(2)</sup> è valida la relazione [2]

---

<sup>1</sup>Un'altra critica consiste nell'osservare che nell'analisi dell'interazione onda-corpuscolo si è sempre considerata la materia alla stregua di un semplice oscillatore armonico (dipolo elettromagnetico), trascurando la fondamentale non linearità della legge di Coulomb. Questo aspetto viene analizzato in altri lavori [9].

<sup>2</sup>La massa del cloro è diversa da quella del sodio. Questo caso viene poi risolto con l'introduzione della massa ridotta  $\mu$ .

$$m \frac{d^2 s_n}{dt^2} = -k(2s_n - s_{n+1} - s_{n-1}).$$

e si trova [2] che lungo il treno di masse si propaga un'onda elastica la cui frequenza è data dalla relazione

$$v = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\pi d}{\lambda}. \quad (2)$$

Quando la lunghezza d'onda è grande rispetto alla distanza interatomica si ha più semplicemente

$$v \approx \frac{d}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

e quindi si perviene alla relazione

$$C = v\lambda = d \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4)$$

Se  $d \times d = S$  è la sezione normale della serie di masse, ciascuna di esse sarà contenuta nel volume  $S \times d$  e quindi la densità sarà data

$$\rho = \frac{m}{Sd}$$

e la (4) diventa

$$C = \sqrt{\frac{dk}{\rho S}}.$$

Per la legge di Hooke, indicando con  $E_Y$  il modulo di elasticità del materiale, lo spostamento percentuale  $(s/d)$  è dato dalla relazione

$$\frac{s}{d} = \frac{F}{E_Y S} = \frac{k s}{E_Y S} \quad (5)$$

e quindi la (4) in definitiva diventa

$$C = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}}. \quad (6)$$

Ma se, nel caso specifico del cristallo di cloruro di sodio [2], i due sistemi di ioni si spostano in direzioni opposte di una distanza  $d$ , allora la forza esistente tra di essi sarà data

$$F = 2 k d.$$

Tenuto evidentemente conto del legame elettrico esistente tra i due ioni, si ha che <sup>3</sup>

$$k = \frac{e^2}{d^3}, \quad (7)$$

dove  $e$  è la carica dell'elettrone, oppure

$$F = \frac{2e^2}{d^2}. \quad (8)$$

Se inoltre la forza data dalla (8) agisce sulla superficie reticolare  $d \times d^4$ , il modulo di elasticità  $E_Y$  di Young risulta essere pari a

$$E_Y = \frac{2e^2}{d^4}. \quad (9)$$

Ciò comporta che la velocità  $C$  del suono nella materia considerata è data dalla relazione

$$C = v\lambda = d\sqrt{\frac{2k}{m}} = d\sqrt{\frac{2e^2}{md^3}} = \sqrt{\frac{2e^2}{md}}. \quad (10)$$

Dunque questa velocità coincide con una certa velocità *orbitale* (velocità di fuga) di due masse consecutive elettricamente collegate tra loro.

D'altra parte quest'ultima relazione può essere scritta

$$C = \sqrt{\frac{2e^2}{md}} = \sqrt{\frac{2e^2}{\frac{m}{d^3}d^4}} = \sqrt{\frac{2e^2}{\rho d^4}} = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}} \quad (11)$$

dalla quale si vede come si possa risalire alla formula ricavata con l'ipotesi del continuum, partendo dalla discontinuità atomica. Tutto ciò può essere generalizzato quando le masse consecutive non sono identiche. In tal caso, introducendo la massa ridotta, si ha

$$C = \sqrt{\frac{2e^2}{\mu d}} \quad (12)$$

e

---

<sup>3</sup> Questo è un modo abbastanza semplice per introdurre le grandezze atomiche.

<sup>4</sup> Il generico atomo è allocato in una cella cubica di lato  $d$ .

[www.carlosantagata.it](http://www.carlosantagata.it)  
[info@carlosantagata.it](mailto:info@carlosantagata.it)

$$E_Y = \frac{2e^2}{d^4}. \quad (13)$$

Anche la pulsazione del cristallo *NaCl* può essere facilmente dedotta e risulta essere

$$\omega = \frac{C}{d} = \sqrt{\frac{2e^2}{\mu d^3}}. \quad (14)$$

## Qualche verifica sperimentale

Le formule dedotte in precedenza sono suscettibili di un'immediata verifica sperimentale tenendo presente:

- 1) che esse sono state ricavate da un modello che è, come vedremo, perfettibile;
- 2) che le stesse sono valide solo per materiali puri al 100%, cioè privi di difetti e dislocazioni;
- 3) che i dati a nostra disposizione e cioè le distanze interatomiche, quelli relativi al modulo di elasticità e quelli inerenti la velocità del suono non sono congruenti in quanto sono stati desunti da tabelle i cui esperimenti non avevano un organico obiettivo.

1) L'esempio che adesso riportiamo riguarda il fenomeno di assorbimento della luce da parte della materia. Quest'ultima può essere assimilata ad un insieme di oscillatori armonici (un modello più ampio e completo dovrebbe considerare anche gli oscillatori anarmonici o non lineari [11] che risuonano quando vengono colpiti dalla radiazione). Secondo l'elettromagnetismo classico la radiazione emessa o assorbita deve avere la medesima pulsazione della carica oscillante (fenomeno della risonanza). Quindi è possibile calcolare la pulsazione della sostanza in esame misurando la pulsazione della radiazione emessa. Seguono in dettaglio i calcoli riportati dal libro [2] (in carattere italico) e si può vedere che con essi ci si rifà alla misura sperimentale del modulo di elasticità del materiale in esame, mentre invece noi ricorremo alla formula teorica (14).

*Siano  $m_1$  ed  $m_2$  le masse di due ioni e sia  $k_o$  la costante elastica della forza esistente tra due ioni contigui. Quando i sistemi di ioni  $Na^+$  e  $Cl^-$  si muovono in opposte direzioni con uno spostamento pari ad  $x$  ciascun ione è sottoposto alla forza  $2k_o x$  e quindi la pulsazione è data dalla relazione*

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2k_o}{\mu}} \quad (15)$$

*dove  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  è la massa ridotta. Il coefficiente  $k_o$  può essere espresso in funzione dei coefficienti elastici del cristallo: infatti se  $d$  è la distanza tra due ioni consecutivi (distanza che è valutabile attraverso un'analisi del campione ai raggi X) esistono  $1/d$  ioni per unità di lunghezza e  $1/d^2$  per unità di superficie ortogonale allo spostamento. Quindi si trova*

$$k_o = \frac{d^2}{d} c_{11} = d c_{11}$$

*dove  $c_{11}$  è il coefficiente elastico che connette la forza con lo spostamento  $x$  nella stessa direzione. I dati riportati nella seguente tabella confermano la (15).*

Crystal	$c_{11} \text{ N/m}^2$	$d \text{ in m}$	$\omega_o \text{ calculated}$	$\omega_o \text{ measured}$
<i>NaCl</i>	$4.9 \cdot 10^{12}$	$2.8 \cdot 10^{-10}$	$3.3 \cdot 10^{13}$	$3.2 \cdot 10^{13}$
<i>KCl</i>	$4.0 \cdot 10^{12}$	$3.1 \cdot 10^{-10}$	$2.4 \cdot 10^{13}$	$2.7 \cdot 10^{13}$
<i>KBr</i>	$3.5 \cdot 10^{12}$	$3.3 \cdot 10^{-10}$	$2.3 \cdot 10^{13}$	$2.1 \cdot 10^{13}$

Osserviamo che i coefficienti  $c_{11}$  sono valutati sperimentalmente attraverso prove di laboratorio. Se invece, d'accordo con quanto osservato in precedenza, assumiamo che i due ioni sono elettricamente collegati, possiamo dedurre le precedenti pulsazioni senza ricorrere alla misura sperimentale del modulo di Young.

Ponendo

$$e = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ u.e.};$$

la massa dell' *Na* =  $23 (1.673 \times 10^{-24})$  in *g* ;

la massa del *Cl* =  $35.5 (1.673 \times 10^{-24})$  in *g* ;

$$d = \text{cm. } 2.8 \times 10^{-8};$$

per l' *NaCl* abbiamo

$$\mu = \frac{23 \times 35.5}{(23+35.5)} 1.673 \times 10^{-24} = 2.3 \times 10^{-23} \text{ g.}$$

Applicando la formula (14) otteniamo <sup>(5)</sup>

$$\omega_{o \text{ NaCl}} = \sqrt{\frac{2e^2}{mp^3}} = \sqrt{\frac{2e^2}{\mu d^3}} = \sqrt{\frac{2(4.8 \times 10^{-10})^2}{2.3 \times 10^{-23} (2.8 \times 10^{-8})^3}} = 3 \times 10^{13}. \quad (16)$$

Per il *KCl*

la massa di *K* =  $39.1 (1.673 \times 10^{-24})$  in *g*.

la massa del *Cl* =  $35.5 (1.673 \times 10^{-24})$  in *g*.

$$d = \text{cm. } 3.1 \times 10^{-8}$$

$$\mu = \frac{39.1 \times 35.5}{(39.1+35.5)} 1.673 \times 10^{-24} = 3.11 \times 10^{-23} \text{ g.},$$

abbiamo

$$\omega_{o \text{ KCl}} = \sqrt{\frac{2e^2}{mp^3}} = \sqrt{\frac{2e^2}{\mu d^3}} = \sqrt{\frac{2(4.8 \times 10^{-10})^2}{3.11 \times 10^{-23} (3.1 \times 10^{-8})^3}} = 2.2 \times 10^{13}. \quad (17)$$

Per il *KBr*

---

<sup>5</sup>La distanza interatomica viene determinata attraverso radiografie ai raggi X.

massa di  $K = 39.1 (1.673 \times 10^{-24})$  in g.

massa del  $Br = 80 (1.673 \times 10^{-24})$  in g.

$$d = c m \cdot 3.3 \cdot 10^{-8}$$

$$\mu = \frac{39.1 \cdot 80}{(39.1+80)} 1.673 \times 10^{-24} = 4.4 \times 10^{-23} \text{ g.},$$

abbiamo

$$\omega_{o \text{ KBr}} = \sqrt{\frac{2e^2}{mp^3}} = \sqrt{\frac{2e^2}{\mu d^3}} = \sqrt{\frac{2(4.8 \times 10^{-10})^2}{4.4 \times 10^{-23} (3.3 \times 10^{-8})^3}} = 1.7 \times 10^{13}. \quad (18)$$

Se confrontiamo questi valori teorici con quelli sperimentali notiamo che essi sono dello stesso ordine di grandezza. Occorre osservare che usando i valori sperimentali di  $c_{11}$  otteniamo un miglior accordo ma ciò è dovuto al fatto che il modello teorico è molto semplice e quindi non tiene conto dei difetti del materiale, dell'anarmonicità, viscosità etc., tutti effetti che hanno un loro peso. D'altra parte il modello usato è, come vedremo, perfettibile.

2) Vogliamo adesso determinare la velocità del suono in una sbarra di alluminio. Possiamo allora scrivere (formula (12)):

$$C = \sqrt{\frac{2 \times (4.8 \times 10^{-10})^2}{26.98 \times 1.673 \times 10^{-24} \times (2.86 \times 10^{-8})}} = 5.9 \times 10^5 [\text{cm/sec}]$$

ed abbiamo un valore comparabile con quello sperimentale di  $5.1 \times 10^5 \text{ cm/sec}$ .

Per il piombo si ha:

$$C = \sqrt{\frac{2 \times (4.8 \times 10^{-10})^2}{207.21 \times 1.673 \times 10^{-24} \times (3.49 \times 10^{-8})}} = 1.9 \times 10^5 [\text{cm/sec}]$$

contro un valore sperimentale di  $1.2 \times 10^5 \text{ cm/sec}$ . Vedremo come queste formule possano essere perfezionate.

3) Si può ipotizzare l'esistenza di un legame elettrico anche tra le molecole di un gas. Consideriamo l'ossigeno a  $273^\circ$ . In questo caso si ha <sup>6</sup>

$$C_{O_2} = \sqrt{\frac{2e^2}{md}} = \sqrt{\frac{2 \times (4.8 \times 10^{-10})^2}{5.34 \times 10^{-23} \times 6.2 \times 10^{-6}}} = 37307 [\text{cm/sec}] = 373 [\text{m/sec}]$$

o, nel caso dell'idrogeno alla stessa temperatura

---

<sup>6</sup>Nel caso dell'aria, alla pressione di un'atmosfera le molecole hanno un cammino libero medio (distanza intermolecolare) dell'ordine di  $6.2 \times 10^{-6} \text{ cm}$  **cite: 1.**

$$C_{H_2} = \sqrt{\frac{2e^2}{md}} = \sqrt{\frac{2 \times (4.8 \times 10^{-10})^2}{3.37 \times 10^{-24} \times 8 \times 10^{-6}}} = 1.307 \times 10^5 [\text{cm/sec}] = 1307 [\text{m/sec}]$$

Questi perfettibili valori sono dello stesso ordine di quelli sperimentali che per l'ossigeno e l'idrogeno sono, rispettivamente, di  $317 \text{ m/sec.}$  e di  $1270 \text{ m/sec.}$ <sup>7</sup>.

4) Modulo di elasticità del ferro omogeneo, dell'alluminio e del rame. Per il ferro omogeneo abbiamo

$$E_f = 2 \frac{e^2}{d^4} = \frac{2 (4.8 \times 10^{-10})^2}{(2.48 \times 10^{-8})^4} = 1.2 \times 10^{12} \left[ \frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2} \right] = 1.2 \times 10^6 \left[ \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \right]$$

valore che è uguale a quello sperimentale. In questo caso osserviamo che l'acciaio, ferro omogeneo con l'aggiunta di piccole quantità di carbonio, ha un valore di  $2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ . E' possibile pensare che l'aggiunta di carbonio modifichi sensibilmente la distanza interatomica del ferro omogeneo. Facilmente si trova che la distanza interatomica dovrebbe essere pari a

$$d = \sqrt[4]{\frac{2 \times (4.8 \times 10^{-10})^2}{2.1 \times 10^{12}}} = 2.16 \times 10^{-8}$$

con una variazione di  $0.3 \times 10^{-8} \text{ cm.}$

Per l'alluminio si ha

$$E_a = 2 \frac{e^2}{d^4} = \frac{2 (4.8 \times 10^{-10})^2}{(2.86 \times 10^{-8})^4} = 6.8 \times 10^{11} \left[ \frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2} \right] = 6.8 \times 10^5 \left[ \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \right]$$

contro un valore sperimentale di  $6.5 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ .

Per il rame

$$E_r = 2 \frac{e^2}{d^4} = \frac{2 (4.8 \times 10^{-10})^2}{(2.55 \times 10^{-8})^4} = 1.09 \times 10^{12} \left[ \frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2} \right] = 1.1 \times 10^6 \left[ \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \right]$$

contro un valore sperimentale di  $1.2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ .

---

<sup>7</sup> Come meglio vedremo l'uso di un modello più appropriato migliora queste previsioni.

## Dilatazione termica

Consideriamo, in un determinato cristallo, una coppia di atomi contigui della cella elementare e siano essi ionizzati una sola volta. Indicando al solito con  $e$  la carica dell'elettrone e con  $r$  la distanza intermolecolare media, possiamo dire che l'energia che lega i due generici ioni è data dalla relazione

$$E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r}. \quad (19)$$

Dalla (19) si ha anche

$$\frac{dE}{dr} \approx \frac{\Delta E}{\Delta r} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r^2} \quad (20)$$

da cui si ottiene che la variazione dell'energia può essere espressa dalla relazione

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r} \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r} \varepsilon,$$

con la posizione

$$\varepsilon = \frac{\Delta r}{r}$$

relativa all'allungamento unitario. Quindi si ha

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r} \varepsilon. \quad (21)$$

Se pensiamo che questa variazione di energia sia dovuta ad una variazione della temperatura ambiente  $\Delta T$  in cui è immerso il sistema allora <sup>(8)</sup> dovrà essere

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r} \varepsilon = \frac{1}{2} k_B \Delta T \quad (22)$$

dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann. Da ciò segue che il coefficiente di dilatazione termica del cristallo in esame è dato dalla relazione

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\Delta T} = \frac{k_B r}{e^2}. \quad (23)$$

Tale formula è suscettibile di verifica sperimentale e sembra essere valida sia per i solidi, i

---

<sup>8</sup>Per il Principio di equipartizione dell'energia [2].

liquidi ed i gas, vari stati della materia che vengono così ad essere caratterizzati dalla sola distanza  $r$ . D'altra parte se si ammette che una stessa sostanza, allo stato solido, ha una struttura cristallina i cui atomi sono elettricamente legati, non si capirebbe perché, sia allo stato liquido che allo stato gassoso tali legami dovrebbero cessare di esistere, visto e considerato che il campo elettrico ha un raggio illimitato d'azione.

Nel sistema [c.g.s.]  $k_B = 1.36 \times 10^{-16} [\text{erg} \times \text{grado}^{-1}]$  e quindi si ha che la (23) diventa

$$\alpha = \frac{k_B}{e^2} r = 590.27 \times r$$

da ciò segue

<i>Materia</i>	$k / e^2$	$r[\text{cm}]$	$\alpha$ calcolo	$\alpha$ sperimentale
<i>Al</i>	590.277	$2.86 \times 10^{-8}$	$1.7 \times 10^{-5}$	$2.0 \times 10^{-5}$
<i>Cu</i>	590.277	$2.55 \times 10^{-8}$	$1.5 \times 10^{-5}$	$1.7 \times 10^{-5}$
<i>Fe</i>	590.277	$2.48 \times 10^{-8}$	$1.4 \times 10^{-5}$	$1.2 \times 10^{-5}$

Si osserva anche che in un gas ideale (a pressione normale) la distanza intermolecolare media a  $273.2^\circ K$  è di  $6.2 \times 10^{-6} \text{ cm}$ . (aria); in tal caso si ha

$$\alpha = \frac{k_B}{e^2} r = 590.27 \times 6.2 \times 10^{-6} \approx 3.66 \times 10^{-3} \approx \frac{1}{273.2} \quad (24)$$

che coincide praticamente con il valore noto.

## L'equazione dei gas perfetti

Per definizione un gas perfetto è tale quando le sue molecole non interagiscono affatto tra loro. Mostriamo invece l'importante ruolo del campo elettrico anche in questo caso.

Sappiamo che un gas a  $0^\circ C$  ha un'energia termica

$$E = \frac{1}{2} k_B 273.14 = \frac{1}{2} 1.36 \times 10^{-16} \times 273.14 = 1.85 \times 10^{-14} \text{ erg.} \quad (25)$$

Se è vero che questa energia è in equilibrio con un'energia ionica, quest'ultima deve avere lo stesso valore dato dalla (25). Nel caso dell'aria si ha

$$E = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r} = \frac{1}{2} \frac{(4.8 \times 10^{-10})^2}{6.2 \times 10^{-6}} = 1.85 \times 10^{-14} \text{ erg.}$$

Se, dato un gas, ammettiamo dunque che esso è costituito da ioni, analogamente a quanto avviene per un cristallo, ed ipotizziamo che tutta la sua energia coulombiana sia equilibrata da quella termica possiamo scrivere, indicando con  $N$  il numero di Avogadro,

$$\frac{1}{2} N \frac{e^2}{r} = \frac{1}{2} N k_B T$$

oppure

$$N \frac{e^2}{r} \frac{r^3}{r^3} = N \frac{e^2}{r^4} r^3 = p V = N k_B T$$

o, ancora, indicando con  $R$  la costante dei gas perfetti

$$p V = R T. \quad (26)$$

La costante di Boltzmann può essere calcolata dall'equazione

$$\frac{e^2}{r} = k_B T$$

considerando che a  $273.2^\circ K$  la distanza media tra gli ioni è di  $6.2 \times 10^{-6} \text{ cm.}$  Infatti si ha

$$k_B = \frac{(4.8 \times 10^{-10})^2}{6.2 \times 10^{-6} \times 273.14} = 1.36 \times 10^{-16}.$$

Accenniamo ad una possibile modifica dell'equazione dei gas perfetti. Si può evidentemente scrivere

$$\Delta E = -\frac{1}{2}e^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r_1}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{r_1}\frac{r_1^3}{r_1^3}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) = -\frac{1}{2}PV\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)$$

e quindi

$$\frac{1}{2}PV\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{1}{2}k_B\Delta T$$

o

$$pV\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) = R \Delta T \quad (27)$$

Ancora

$$\Delta E = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r}\varepsilon = \frac{1}{2}PV\varepsilon = \frac{1}{2}k_B\Delta T$$

oppure

$$pV\varepsilon = pV\alpha\Delta T = Nk_B\Delta T$$

da cui, in condizioni normali di temperatura e pressione, si ha

$$\alpha = \frac{Nk_B}{pV} = \frac{60.6 \times 10^{22} \times 1.38 \times 10^{-16}}{1.033 \times 10^6 \times 22414} = 3.5892 \times 10^{-3} \approx \frac{1}{276}. \quad (28)$$

Dal confronto tra la (24) e la (28) si ha anche

$$N = \frac{pV}{\frac{e^2}{r}} \quad (29)$$

e cioè il rapporto tra l'energia macroscopica ( $pV$ ) contenuta in una grammolecola di un gas e l'energia elettrica microscopica ( $e^2/r$ ) di una singola molecola è pari al numero di Avogadro.

Ed infatti, nelle ordinarie condizioni di pressione e temperatura si ha

$$N = \frac{1.033 \times 10^6 \times 22414}{\frac{(4.8 \times 10^{-10})^2}{6.2 \times 10^{-6}}} = 6.23 \times 10^{23}. \quad (30)$$

## Nota

Sappiamo che una carica elettrica vibrante con una certa frequenza  $\nu$  emette una radiazione elettromagnetica di pari frequenza. Questa perfetta identità è valida sia nell'elettromagnetismo classico che in fisica quantistica. Abbiamo anche trovato un possibile legame tra l'ampiezza di vibrazione  $\Psi$  di una carica e la lunghezza dell'onda elettromagnetica emessa dalla carica vibrante [12]. Detto legame è dato dalla formula

$$\lambda = 2\pi 137 \Psi n, \quad (31)$$

dove  $n$  è un numero intero. Nei lavori [14] abbiamo mostrato la validità della precedente formula solo dal punto di vista teorico.

Un gas può costituire una verifica sperimentale della detta relazione perché se è vero che esso può essere pensato come un insieme sterminato numero di molecole continuamente agitato dall'energia termica, in tal caso ci troviamo di fronte a delle cariche elettriche<sup>9</sup> che vanno avanti ed indietro e quindi descrivono mediamente una certa ampiezza  $\Psi$ . Possiamo allora arguire che ciò che avvertiamo come sensazione di calore non sia altro che radiazione elettromagnetica emessa dalle dette cariche che sono continuamente accelerate e decelerate.

Nel caso di non accurate analisi spettroscopiche possiamo la (31) può essere scritta

$$\lambda = 2\pi 137 \Psi = 2\pi 137 r.$$

Vista anche la validità dell'identità [12]

$$\frac{e^2}{r} = \frac{e^2}{\Psi} = \frac{hC}{\lambda}$$

e che per un gas si può scrivere

$$\frac{e^2}{r} = \frac{e^2}{\Psi} = \frac{hC}{\lambda} = h\nu = kT,$$

si ha che alla temperatura di 273° K si ha

$$\nu = \frac{kT}{h} = \frac{1.36 \times 10^{-16} \times 273}{6.67 \times 10^{-27}} = 5.56 \times 10^{12}.$$

Quindi si ha una lunghezza d'onda media di

---

<sup>9</sup> Per quanto visto in precedenza.

[www.carlosantagata.it](http://www.carlosantagata.it)  
[info@carlosantagata.it](mailto:info@carlosantagata.it)

$$\lambda = \frac{2.998 \times 10^{10}}{5.56 \times 10^{12}} = \text{cm.}0.0053.$$

Dividendo tale valore per  $2\pi 137$  abbiamo

$$r = \Psi = \frac{0.0053}{2\pi 137} = \text{cm.}6.2 \times 10^{-6},$$

valore dello stesso ordine di grandezza del percorso libero medio di una molecola di gas a quella temperatura.

## Calori specifici

Consideriamo ancora la relazione

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r} \varepsilon.$$

Introducendo il coefficiente di dilatazione termica  $\alpha$  abbiamo anche

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r} \alpha \Delta T.$$

Indicata con  $m$  la massa dell'atomo si ha

$$c_V = \frac{1}{m} \frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{mr} \alpha.$$

Se consideriamo che un atomo non puntiforme ha 6 gradi di libertà si ha

$$\bar{c}_V = 3 \frac{e^2}{mr} \alpha. \quad (31)$$

Poiché

$$\alpha = \frac{k_B r}{e^2} \quad (32)$$

in definitiva si ottiene

$$\bar{c}_V = 3 \frac{k_B}{m} \quad (33)$$

e dunque

$$m \bar{c}_V = 3k_B \quad (34)$$

oppure <sup>(10)</sup>

$$N m \bar{c}_V = C_V = 3 N k_B = 3 R$$

che coincide con la legge di Dulong e Petit <sup>(11)</sup>.

---

<sup>10</sup>Si osserva che

$$3 \times N \times k = 3 \times 60.6 \times 10^{23} \times 1.38 \times 10^{-16} = \\ 2.5088 \times 10^8 \text{ erg}/^\circ K = 5.9923 \text{ cal}/^\circ K.$$

<sup>11</sup>Si osserva inoltre che la massa del protone (o di un atomo di idrogeno) è data

$$m = \frac{1}{N} = \frac{1}{6.02 \times 10^{23}} = 1.66 \times 10^{-24} \text{ g.}$$

infatti un grammo di idrogeno contiene  $N$  atomi.

Dalla (31), ricordando che la velocità del suono in seno alla materia è

$$v = \sqrt{\frac{2e^2}{mr}}$$

si ha anche

$$\bar{c}_v = 3 \frac{e^2}{mr} \alpha = \frac{3}{2} \frac{2e^2}{mr} \alpha = \frac{3}{2} v^2 \alpha \quad (35)$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\bar{c}_v}{\alpha}}. \quad (36)$$

Per l'aria si ha (formula (33))

$$\bar{c}_v = \frac{3 \times 1.38 \times 10^{-16}}{2 \times 16 \times 1.672 \times 10^{-24}} = 7.73 \times 10^6 \text{ erg/K}$$

e quindi

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{7.73 \times 10^6}{\frac{1}{273.2}}} = 37522 \text{ cm/s} = 375 \text{ m/s}.$$

Valore coincidente con quello già calcolato in precedenza e comunque superiore a quello sperimentale. A questo punto occorre osservare che siamo partiti da un modello costituito da un treno di masse collegate tra loro da una forza elettrica. Un modello di cristallo o cristalloide molto più realistico è costituito da un reticolo spaziale per il quale il potenziale reale, per un'ione all'interno del generico cristallo, è dato da un'espressione del tipo [2] [3] [4]

$$E = - \left( 6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} \pm \dots \right) \frac{e^2}{r} \left( 1 - \frac{1}{n} \right). \quad (37)$$

Per cristalli cubici a facce centrate (*NaCl*) si ha

$$E = -1.74755 \frac{e^2}{r} \left( 1 - \frac{1}{9} \right) = -1.553 \frac{e^2}{r}.$$

Una formula più attendibile della velocità del suono nell'aria potrebbe allora essere del tipo

$$v = \sqrt{\frac{1.553 \times e^2}{m r}} \quad (38)$$

---

e quindi a  $0^{\circ}C$  si ha

$$v = \sqrt{\frac{1.553 \times (4.8 \times 10^{-10})^2}{2 \times 16 \times 1.672 \times 10^{-24} \times 6.2 \times 10^{-6}}} = 32843 \text{ cm/s} = 328 \text{ m/s}$$

contro un valore sperimentale di  $332 \text{ m/sec.}$ .

Si osservi come la (38) possa essere comparata con la nota formula classica

$$v = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \gamma \quad (39)$$

dove con  $p$  si è indicata la pressione nel gas generico, con  $\rho$  la densità e con  $\gamma = C_p / C_v$ , dove  $\gamma$  dipende dal tipo di gas (per un gas monoatomico si ha  $\gamma = 5/3$ , per un gas biatomico  $\gamma = 7/5$  etc.) . Infatti la (39) può essere scritta

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{mr}} \gamma' = \sqrt{\frac{e^2}{\frac{m}{r^3} r^4}} \gamma' = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \gamma' \quad (40)$$

dove questa volta  $\gamma'$  è la costante di Madelung [4] che dipende, anch'essa e più precisamente, dal numero e dalla disposizione spaziale degli ioni che compongono la sostanza in esame. La formula precedente può anche essere scritta

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{mr}} \gamma' = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \gamma' = \sqrt{\frac{RT}{N m}} \gamma' \quad (41)$$

che coincide con quella di Laplace se  $\gamma = \gamma'$ . Si osserva inoltre che dalla (41) si ha anche

$$\frac{mv^2}{e^2/r} = \gamma'. \quad (42)$$

## Tensione superficiale e calore di vaporizzazione

La fig. 2 riporta il noto telaio con il quale è possibile determinare il valore della tensione superficiale dell'acqua saponata.

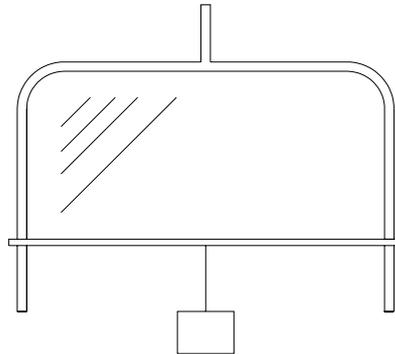


Fig. 2

Abbiamo già visto che per i solidi la distanza intermolecolare media è dell'ordine di  $10^{-8} \text{ cm}$ , per i liquidi dovrebbe essere dell'ordine di  $10^{-7} \text{ cm}$ . e per i gas  $10^{-6} \text{ cm}$ . Se si pensa che anche per l'acqua le molecole si posizionano mediamente ad una certa distanza tra loro, la tensione lineare  $\tau$  dovrebbe essere evidentemente data da una formula del tipo

$$\tau = \frac{e^2 s}{d^3 d} \quad (43)$$

dove  $d$  è la distanza intermolecolare ed  $s$  è lo spessore della lamina d'acqua. Non conosciamo la distanza  $d$  per l'acqua in condizioni normali; possiamo però assumere come primo tentativo un valore di  $d$  pari a  $3 \times 10^{-7} \text{ cm}$ . e, per lo spessore medio  $s$  un valore di  $2.54 \times 10^{-6} \text{ cm}$ <sup>(12)</sup>. Con ciò si ha

$$\tau = \frac{(4.8 \times 10^{-10})^2}{(3 \times 10^{-7})^4} 2.54 \times 10^{-6} = 72 \text{ dyn/cm} \quad (44)$$

praticamente coincidente con il valore sperimentale di circa  $76 \text{ dyne/cm}$ .

Possiamo determinare il valore di  $d$  con il seguente ragionamento. Per vaporizzare completamente  $1 \text{ Kg}$  d'acqua occorre spendere, per ogni sua molecola, un'energia pari a <sup>(13)</sup>

<sup>12</sup> Questo spessore della membrana è dell'ordine di  $10^{-6}$  pollici.

<sup>13</sup> Si considera una molecola non polarizzata.

$$\Delta E = e^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{e^2}{r_1} \left( 1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \quad (45)$$

dove  $r_1$  rappresenta la distanza intermolecolare media dell'acqua allo stato liquido ed  $r_2$  quella allo stato di vapore. Se  $r_2$  è dell'ordine di  $6 \times 10^{-6} \text{ cm}$ . o superiore si ha che la (45) diventa più semplicemente

$$\Delta E \simeq \frac{e^2}{r_1}. \quad (46)$$

Poiché  $1 \text{ cm}^3$  di materia allo stato normale contiene circa  $2.705 \times 10^{19}$  molecole [8] ed  $1 \text{ Kg}$  d'acqua occupa circa  $10^3 \text{ cm}^3$  si ha

$$\Delta E \simeq 2.705 \times 10^{19} \times \frac{(4.8 \times 10^{-10})^2}{3 \times 10^{-7}} \times 1000 = 2.0774 \times 10^{10} \text{ erg} = 537 \text{ cal}$$

che è in accordo col valore sperimentale di  $540 \text{ cal}$ . Quindi il calcolo precedente resta sostanzialmente confermato a meno di un più accurato riscontro sperimentale. Un altro esempio dello stesso tipo di ha per il calcolo dell'energia di formazione di un cristallo o, il che è la stessa cosa, energia di distruzione dello stesso. Per una chilomole di  $\text{NaCl}$  si ha la formula più precisa [3,pag. 266]

$$\Delta E = 1.744 \frac{(4.8 \times 10^{-10})^2}{2.8 \times 10^{-8}} \left( 1 - \frac{1}{9} \right) = 7.7302 \times 10^{12} \text{ erg} = 184 \text{ kcal}$$

contro il valore sperimentale di  $181 \text{ kcal}$ .

## Forze ioniche deboli

Consideriamo adesso, tanto per fare un ragionamento concreto, una sbarretta di ferro omogeneo con una sezione di  $1 \text{ cm}^2$ . Se applichiamo due forze uguali e contrarie alle sue estremità, nei limiti della deformazione elastica, avremo <sup>(14)</sup>

$$\sigma = E_Y \varepsilon \quad (47)$$

dove il modulo di Young  $E_Y$  è dato dalla relazione

$$E_Y \approx 2 \frac{e^2}{d^4}. \quad (48)$$

E' abbastanza evidente che se si aumenta la tensione parimenti cresce, nella stessa direzione, anche la distanza  $d$  e quindi diminuisce sempre più la forza da applicare. Non vi è però alcun motivo di pensare che la detta tensione, ben rilevabile quando il campione è ancora integro, non permanga, invero in misura fievolissima, anche quando si provoca la definitiva rottura del provino e le due parti del corpo vengano poste ad una distanza qualsiasi tra di loro, e ciò sempre perché il raggio d'azione del campo elettrico è illimitato. Se, dopo la rottura del provino, comprimiamo i due pezzi tra loro nel tentativo di ricostruirlo, osserviamo che, nonostante la presenza della sottile frattura, occorre sempre una certa forza, anch'essa molto debole, per separare di nuovo le due parti, forza coesiva in ogni caso riconducibile alla presenza di ioni superficiali. L'esistenza di questi ioni superficiali ancora attivi è molto più vistosa nei noti fenomeni di tensione superficiale. Nel momento in cui due gocce d'acqua si sfiorano tendono a riunirsi bruscamente per formare un'unica entità. I fenomeni di adsorbimento dei gas da parte dei metalli, con la formazione, ad esempio, di molecole di ossido di ferro (nuovi legami chimici), sono anch'essi dovuti alle tensioni superficiali ascrivibili interamente all'esistenza di campi coulombiani residui sulle superfici dei corpi; né si può escludere il fatto che anche gli ioni interni al corpo possano ancora esercitare un'azione residua all'esterno dello stesso.

Se dunque è valido un certo principio di continuità, le tensioni tra i solidi, i liquidi, i solidi e liquidi etc., non si manifestano soltanto quanto essi sono a diretto contatto tra loro <sup>(15)</sup>, ma anche quando gli stessi sono separati da distanze comunemente macroscopiche.

In mancanza di dati sperimentali certi sulle modalità di trasmissione di questo tipo di forze anche a distanze relativamente grandi, non è il caso di azzardare delle stime.

Circa l'esistenza sperimentale di queste forze, che dovrebbero manifestarsi tra corpi distanti

---

<sup>14</sup>Anche questa formula può essere ricavata facilmente dalla (21).

<sup>15</sup>A questo punto sarebbe necessario definire in modo più preciso di cosa debba intendersi per distanza di contatto.

tra loro e posti allo stesso potenziale, è il caso di ricordare l'esperienza di Ettore Majorana (v. fig. 3).

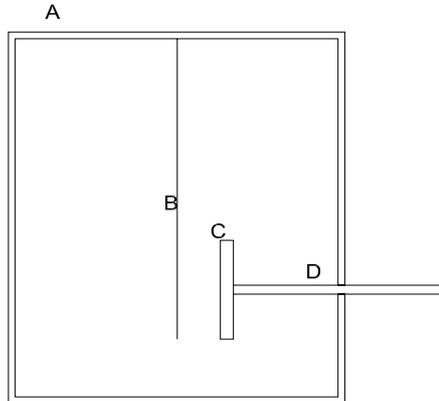


Fig. 3

E. Perucca, a questo proposito [6], testualmente afferma :

*Un filo di vetro di silice B metallizzato, per esempio dorato, pende verticalmente ed è parallelo al piatto C . anch'esso metallico ed è metallicamente collegato alla gabbia A. C può venire avvicinato a B mediante una vite micrometrica; C è anch'esso metallicamente collegato alla gabbia A. L'esperienza mostra che, se C è un metallo diverso da quello che copre il vetro di silice B, per una conveniente distanza tra C e B (dell'ordine del decimo di centimetro), il filo risulta sensibilmente attratto da C e si precipita su questo. L'adesione (o coesione) che si avrebbe anche se C e B fossero metalli uguali si manifesta solo a distanze di gran lunga inferiori. L'attrazione osservata è di origine elettrica e segnala l'esistenza di cariche eteronome affacciate su C e B , e, quindi di una differenza di potenziale esistente nel dielettrico tra i metalli eterogenei C e B , nonostante gli stessi siano allo stesso potenziale.*

Sarebbe interessante stabilire sperimentalmente questa differenza di potenziale (con una strumentazione di Majorana modificata), paragonandola a quella teorica, quest'ultima determinabile quando sia nota la distanza interatomica della struttura cristallina dei due materiali. In tal caso occorrerebbe tener presente che, a temperatura ambiente, tra due metalli con diverse strutture cristalline dovrebbe aversi una differenza di potenziale (termocoppia di Melloni) dell'ordine di

$$\Delta V = \frac{e}{d_1} \left( 1 - \frac{d_1}{d_2} \right).$$

## Nota

In questo scritto si è solo formulata un'idea di lavoro che, come tale, è del tutto perfettibile. D'altra parte le varie verifiche riportate hanno, per il momento, un valore quasi indiziario in quanto, ad esempio, il modulo di elasticità di una sostanza riportato da un testo non è stato certamente determinato dallo stesso provino con il quale si è poi determinata la distanza interatomica. Ciò comporta la necessità di maggiori e più mirati esperimenti unitamente ad una più approfondita ricerca teorica.

## Bibliografia

- [1] G. Castelfranchi **Fisica Moderna atomica e nucleare** HOEPLI Editore
- [2] P. Fleury J.P. Mathieu **La luce** Vol. V pag. par. 9-7 Zanichelli Bologna
- [3] P. Fleury J.P. Mathieu **Calore-Termodinamica-Stati della materia** Zanichelli Bologna
- [4] A. R.Verma O. N. Srivastava **Crystallography for Solid State Physics** Wiley Eastern Limited
- [5] C. Kittel **Elementary Solid State Physics** Wiley & Sons, New York - London
- [6] C. Santagata **Macrocosm an microcosm: an unexpected bond between elasticity theory and electron charge** Vol. 21, N ° 3, September 2000 Journal of Information & Optimization Science (J.I.O.S.)
- [7] E. Perucca **Fisica generale e sperimentale** Vol. II ° tomo II °
- [8] G. Castelfranchi **Fisica sperimentale e applicata** HOEPLI Editore
- [9] C. Santagata **Sui Fondamenti della Meccanica Quantistica** di prossima pubblicazione
- [10] P. Ehrenfest **The Making of a Theoretical Physicist** North-Holland Publishing Company
- [11] C. Santagata **Black body and elliptic oscillator** Vol. 17 (1996), N ° 3, Journal of Information & Optimization Science (J.I.O.S.)
- [12] C. Santagata **New Quantum Relations** [www.carlosantagata.it](http://www.carlosantagata.it)
- [13] C. Santagata **The New Soluzion of Ultraviolet Catastrophe of Rayleigh-Jeans and the New Form of Energy** [www.carlosantagata.it](http://www.carlosantagata.it)
- [14] [www.carlosantagata.it](http://www.carlosantagata.it)