

# **Fisica ed Ingegneria Sismica**

**Una critica alla Meccanica delle Vibrazioni**

**Una possibile rilettura dell'equazione di Planck**

**Quantizzazione dell'energia gravitazionale**

**Prima parte**

*La Verità, per definizione, dovrebbe essere la più semplice ed innocente delle Bugie. (C. S.)*

## **Abstract**

Se  $\Omega$  è la pulsazione del forzante ed  $\omega$  quella del sistema oscillante, è noto che, secondo la corrente Meccanica delle Vibrazioni, si ha un'unica condizione di risonanza, caratterizzata dall'identità

$$\Omega = \omega ,$$

nell'ipotesi che sia nullo l'attrito interno detto sistema.

E' possibile dimostrare che la precedente identità è solo una delle infinite e numerabili condizioni di risonanza che possono verificarsi nella realtà sperimentale e che la condizione più generale è data invece dalla relazione

$$\omega = \Omega n \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

in cui  $n$  è un qualsiasi numero intero naturale.

In questa sede esamineremo le immediate implicazioni che ciò comporta in ingegneria sismica ed in fisica teorica.

## 1. Introduzione

Uno dei più importanti fenomeni fisici attraverso il quale una qualsiasi forma di energia può passare da un sistema ad un altro è il cosiddetto fenomeno della risonanza. Così, ad esempio, la luce, fenomeno eminentemente oscillatorio, può essere assorbita dalla materia o attraversarla indisturbata, oppure un'onda sismica può pericolosamente scuotere una struttura fino a produrne il collasso, oppure lasciarla completamente indenne. Si verifica l'una o l'altra delle dette situazioni a seconda che il sistema che riceve l'azione va o non in risonanza con la causa esterna che agisce sullo stesso.

Da qui la fondamentale importanza di studiare a fondo il detto fenomeno.

In proposito è ferma, radicata e generale convinzione che esso si verifica solamente quando la frequenza del forzante  $\Omega$  coincide con quella  $\omega$  del sistema in studio e quindi, in assenza di attrito interno, si ha l'unica condizione

$$\omega = \Omega. \quad (1.1)$$

Ma è molto semplice ed immediato invece vedere che la relazione precedente è solo una delle infinite e *numerabili* condizioni di risonanza che possano aversi nella quotidiana e macroscopica realtà.

Infatti si può dimostrare, sia in modo molto intuitivo che analiticamente, che, in generale, è valida la relazione

$$\omega = \Omega n \quad (1, 2, 3, \dots) \quad (1.2)$$

dove  $n$  deve essere rigorosamente un numero intero.

Considereremo vari sistemi oscillanti che hanno un solo grado di libertà (Single Degree Of Freedom (SDOF)). L'estensione a sistemi continui, che verrà trattata successivamente, è immediata. La fig. 1 riporta un pendolo, privo di attrito, il cui periodo è dato dalla nota relazione (1.3)

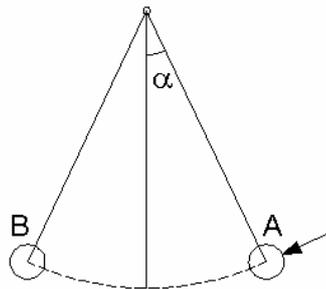


fig. 1

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.3)$$

La fig. 2 riporta il caso di un elastico al quale è sospesa una massa  $m$ . Se detta massa oscilla intorno alla posizione di equilibrio il periodo è dato dalla relazione

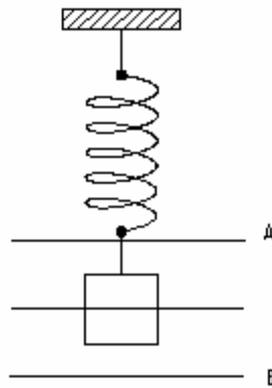


fig. 2

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.4)$$

dove  $m$  è la massa e  $k$  è la costante elastica della molla.

La fig. 3 riporta il caso di un portale con traverso infinitamente rigido (deformata alla Grinter<sup>1</sup>) per il quale vale ancora la (1.4) e dove

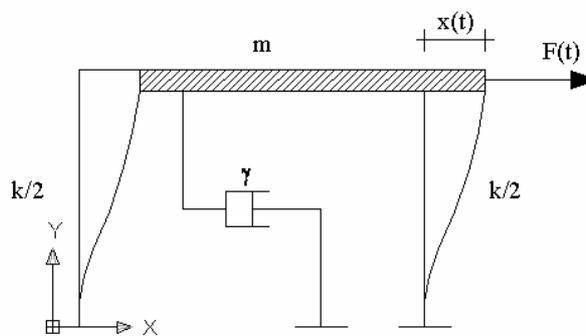


fig. 3

$$k = 2\frac{12EI}{h^3}, \quad (1.5)$$

$E$  è il modulo di elasticità dei ritri,  $I$  il momento d'inerzia degli stessi nella direzione dello spostamento ed  $h$  la loro altezza.

<sup>1</sup> Con questa ipotesi, per pura semplicità, si evita il calcolo dello spostamento del telaio dovuto alla deformabilità del traverso, ipotesi che può comunque essere rimossa.

E' forse opportuna la seguente precisazione. Come si vede dalla (1.4), il periodo dei sistemi ora considerati è indipendente dalla elongazione iniziale dell'oscillatore. La fig. 4 riporta lo schema generico del detto oscillatore armonico.

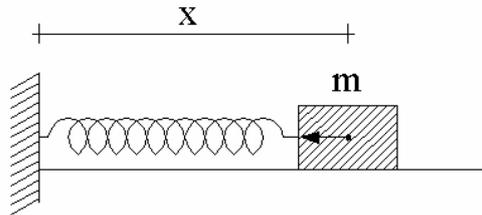


fig. 4

In tal caso la forza di richiamo agente sulla massa è direttamente proporzionale allo spostamento e cioè essa è data dall'equazione

$$F = -k x . \quad (1.6)$$

Dunque la massa è soggetta ad una forza di richiamo che è tanto più forte quanto più il punto di partenza dista dall'origine. Si sarebbe allora tentati di pensare che il periodo  $\tau$  di tale oscillatore fosse tanto più piccolo quanto maggiore è l'elongazione iniziale della molla e ciò contrariamente a quanto invece si deduce dalla (1.4). Ma occorre osservare che se è vero che la forza è tanto più grande quanto più grande è l'elongazione è pur vero che, ad una grande elongazione iniziale, corrisponde anche uno spazio maggiore che la massa deve percorrere. Quindi, sebbene la massa venga ad essere assoggetta ad una maggiore velocità media, dovrà comunque percorrere uno spazio maggiore, da qui l'indipendenza del periodo dall'elongazione e la validità della (1.4).

Non è così nel caso particolare del pendolo di fig. 1. La diretta proporzionalità tra forza di richiamo ed arco di partenza, corrispondente all'angolo  $\alpha$ , è valida fino a quando è lecito confondere  $\alpha$  (espresso in radianti) con il valore di  $\text{sen } \alpha$  e cioè quando

$$\sin \alpha \cong \alpha .$$

Quando ciò accade ricadiamo nel famoso isocronismo delle piccole oscillazioni (Galilei) e quindi possiamo affermare che il periodo del pendolo è ancora indipendente dall'elongazione iniziale. L'analisi che segue considererà solo oscillatori armonici e quindi lineari. Ciò comporta che considerando, in questa sede, solo oscillatori la cui forza di richiamo segue la legge di Hooke, parafrasando Galilei, possiamo dire che per essi è sempre valido l'isocronismo delle oscillazioni, piccola o grande che sia la loro elongazione iniziale o intermedia.

Ciò detto, vogliamo adesso renderci intuitivamente conto della validità della (1.2), per poi procedere analiticamente.

La massa  $m$ , sospesa in A, impiega il tempo  $\tau$  per descrivere il percorso  $ABA$ , lo stesso avverrà per gli altri sistemi rappresentati nelle precedenti figure. Se, nel momento in cui la detta massa rioccupa la posizione A, applichiamo una forza per un breve tempo, così come si vede in fig. 1, e ripetiamo continuamente questa operazione ogni qual volta detta massa si ritrova in A, provochiamo il cosiddetto fenomeno della risonanza e quindi le

ampiezze di oscillazione del pendolo aumenteranno indefinitamente. Se allora indichiamo con  $T$  il periodo con il quale applichiamo i detti impulsi abbiamo l'ovvia identità

$$T = \tau \quad (1.7)$$

che, in termini di pulsazione, può anche essere scritta nella forma

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\tau} = \Omega = \omega, \quad (1.8)$$

da qui la classica ed unica condizione di risonanza. Ma è altresì evidente che non siamo affatto costretti ad applicare i detti impulsi ogni qual volta la massa rioccupa *consecutivamente* la posizione A per provocare l'aumento illimitato dell'ampiezza di oscillazione. Infatti se, con opportune e variabili pause, applichiamo i detti impulsi ogni qual volta è vera l'identità

$$T = \tau n \quad (n=1,2,3\dots) \quad (1.9)$$

dove  $n$  deve essere ovviamente e rigorosamente un numero intero, anche in questo caso più generale riusciamo a produrre il fenomeno della risonanza. Infatti solo se  $n$  è un numero intero l'azione che provocherà il nostro impulso sarà sempre concorde o in assonanza con il naturale moto della massa oscillante e quindi la nostra azione non potrà mai provocare un indesiderato arresto del moto della massa, cosa che sicuramente avverrebbe se detti numeri non fossero interi o, la massimo, frazionari. Dalla (1.9) si avrà evidentemente l'identità<sup>2</sup>

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\tau n} \Rightarrow \Omega = \frac{\omega}{n} \Rightarrow \omega = \Omega n. \quad (1.10)$$

Ma la notizia data dalla (1.10) descrive solo molto empiricamente e per grandi linee il detto fenomeno, né con essa possiamo comprendere l'importante ruolo della forza di attrito, e quant' altro necessario per descrivere l'intera dinamica del fenomeno. Con la (1.10), di questo fondamentale fenomeno riusciamo solo a vedere, ed in modo molto sfocato, la punta estrema dell' iceberg, mentre ci sfugge anche la puntuale descrizione della enorme *parte* sommersa. Invece le soluzioni analitiche che seguono ci consentiranno di calcolare spostamenti, accelerazioni e velocità *puntuali* della massa soggetta a vibrazioni e quindi di stabilire con certezza la cosiddetta risposta dell'oscillatore.

---

<sup>2</sup> Il video allegato al presente file riporta appunto questo esempio.

## 2. Sviluppi analitici

Per poter studiare rigorosamente i concetti espressi in precedenza costruiamo un forzante che ci consenta di applicare un impulso, di durata  $\Delta t$ , che abbia una certa pulsazione  $\Omega$ . Con uno sviluppo in serie di Fourier possiamo considerare il forzante

$$F = m\delta \left\{ \frac{a}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{1} \sin(1a) \cos(\Omega t) - \frac{1}{2} \sin(2a) \cos(2\Omega t) + \frac{1}{3} \sin(3a) \cos(3\Omega t) - \dots \right] \right\}, \quad (2.1)$$

dove  $m$  è la massa oscillante,  $\delta$  la sua accelerazione e  $(2a)$  rappresenta l'intervallo di applicazione dello stesso  $\left(\Delta t = \frac{2a}{\Omega}\right)$ . Detto forzante, man mano che si considerano più termini della serie, tende ad un impulso rettangolare (v. fig. 3).

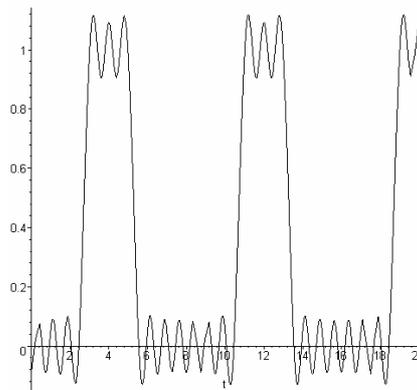


fig. 3

Nel caso di un oscillatore privo di attrito abbiamo allora l'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \delta \left\{ \frac{a}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{1} \sin(1a) \cos(\Omega t) - \frac{1}{2} \sin(2a) \cos(2\Omega t) + \frac{1}{3} \sin(3a) \cos(3\Omega t) - \dots \right] \right\}. \quad (2.2)$$

Poiché essa è lineare possiamo risolverla sommando le varie soluzioni delle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \frac{\delta a}{\pi} \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= -\frac{1}{1} \frac{2\delta}{\pi} \sin(1a) \cos(1\Omega t) \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= +\frac{1}{2} \frac{2\delta}{\pi} \sin(2a) \cos(2\Omega t) \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= -\frac{1}{3} \frac{2\delta}{\pi} \sin(3a) \cos(3\Omega t) \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned} \quad (2.21)$$

La prima equazione ha la soluzione

$$x_1(t) = C_{11} \cos(\omega t) + C_{12} \sin(\omega t) + \frac{\delta a}{\pi \omega^2}. \quad (2.22)$$

La seconda, posto

$$\Xi = -\frac{2\delta}{\pi} \sin(a), \quad (2.23)$$

ha la soluzione

$$x_2(t) = C_{21} \cos(\omega t) + C_{22} \sin(\omega t) + \Xi \frac{\cos(\Omega t)}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad (2.24)$$

la terza, posto

$$\Upsilon = \frac{1}{2} \frac{2\delta}{\pi} \sin(2a), \quad (2.25)$$

$$x_3(t) = C_{31} \cos(\omega t) + C_{32} \sin(\omega t) + \Upsilon \frac{\cos(2\Omega t)}{\omega^2 - 2^2 \Omega^2} \quad (2.26)$$

e la quarta, posto

$$\Gamma = -\frac{1}{3} \frac{2\delta}{\pi} \sin(3a), \quad (2.27)$$

è

$$x_4(t) = C_{41} \cos(\omega t) + C_{42} \sin(\omega t) + \Gamma \frac{\cos(3\Omega t)}{\omega^2 - 3^2 \Omega^2} \quad (2.28)$$

per cui la soluzione generale risulta essere

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{\delta a}{\pi \omega^2} + \Xi \frac{\cos(1\Omega t)}{\omega^2 - 1^2 \Omega^2} + \Upsilon \frac{\cos(2\Omega t)}{\omega^2 - 2^2 \Omega^2} + \Gamma \frac{\cos(3\Omega t)}{\omega^2 - 3^2 \Omega^2} + \dots \quad (2.3)$$

Il primo ed il secondo termine della precedente soluzione (e cioè i due termini caratterizzati dalle costanti  $A$  e  $B$  da determinarsi imponendo le condizioni iniziali) danno luogo alla nota soluzione sinusoidale, alla quale si sommano gli effetti degli altri termini del secondo membro. Se si studia la funzione costituita da questi ultimi si hanno i seguenti grafici (fig. 4 e 5). Sull'asse  $n$  è riportato il rapporto  $\Omega/\omega$ , sull'asse  $t$  il tempo e sull'asse verticale la risposta  $x(t)$  dell'oscillatore.

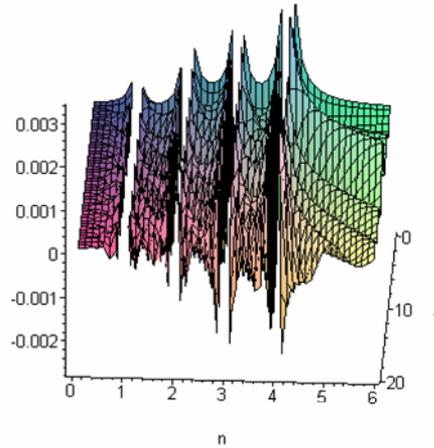


fig. 4

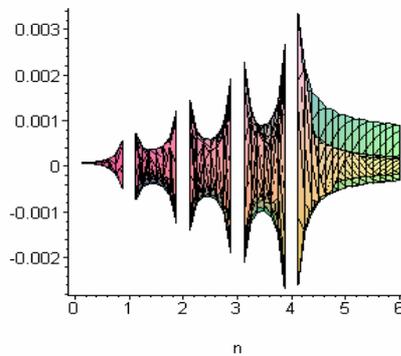


fig. 5

La fig. 5 riporta frontalmente il grafico della fig. 4. Dalla soluzione (2.3) e dalle dette figure si evince che si hanno più condizioni di risonanza quando il rapporto  $\Omega/\omega$  è pari ad un numero intero. Infatti i vari denominatori del secondo membro della (2.3) si annullano quando

$$\omega = \Omega n \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots) \quad (2.4)$$

Il generico termine della soluzione, che è esprimibile sinteticamente dalla formula

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ (-1)^n \frac{2\delta}{\pi n} \sin(na) \right\} \frac{\cos(n\Omega t)}{\omega^2 - n^2\Omega^2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} T_n \frac{\cos(n\Omega t)}{\omega^2 - n^2\Omega^2}, \quad (2.5)$$

assume valori indefiniti quando è verificata la (2.4).

Chiaramente, con lo studio dell'equazione dell'equazione (2.2), seppur viene riconfermata pienamente l'intuizione della condizione di risonanza (1.10) nonché il semplice esperimento riportato nel filmato allegato, non si raggiungono grossi risultati. Resta indeterminata la posizione della massa proprio in prossimità delle risonanze.

Ciò comporta una indeterminazione completa dell'elongazione, della velocità e dell'accelerazione negli intorni delle risonanze alle quali viene ad essere soggetto il sistema oscillante. A meno di non voler ricorrere ad una rinormalizzazione<sup>3</sup>, è necessario non trascurare la forza di attrito.

<sup>3</sup> Anche la coppia protone-elettrone costituisce un sistema oscillante. Ed anche per questo sistema sono valide queste considerazioni. In fisica, non conoscendo la posizione puntuale dell'elettrone intorno al nucleo,

### 3. La risposta dell'oscillatore con smorzamento

In tal caso si ha l'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \delta \left\{ \frac{a}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{1} \sin(1a) \cos(1\Omega t) - \frac{1}{2} \sin(2a) \cos(2\Omega t) + \frac{1}{3} \sin(3a) \cos(3\Omega t) + \dots \right] \right\}. \quad (3.1)$$

Procediamo in modo del tutto analogo al caso precedente. Abbiamo il seguente insieme di equazioni

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x &= \frac{\delta a}{\pi} \\ \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x &= -\frac{1}{1} \frac{2\delta}{\pi} \sin(1a) \cos(1\Omega t) \\ \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x &= +\frac{1}{2} \frac{2\delta}{\pi} \sin(2a) \cos(2\Omega t) \\ \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x &= -\frac{1}{3} \frac{2\delta}{\pi} \sin(3a) \cos(3\Omega t) \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned} \quad (3.11)$$

La prima equazione ha la soluzione

$$x_0(t) = C_1 e^{\left[\frac{1}{2}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2})t\right]} + C_2 e^{\left[\frac{1}{2}(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2})t\right]} + \frac{\delta a}{\pi\omega^2}. \quad (3.12)$$

La seconda, posta

$$T_1 = -\frac{1}{1} \frac{2\delta}{\pi} \sin(1a) \quad (3.13)$$

ha la soluzione

$$x_1(t) = C_1 e^{\left[\frac{1}{2}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2})t\right]} + C_2 e^{\left[\frac{1}{2}(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2})t\right]} + \frac{T_1 \left[ (\omega^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t) + \gamma \Omega \sin(\Omega t) \right]}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}. \quad (3.14)$$

Questa equazione, com'è noto, può essere scritta nella forma

$$x_1(t) = C_1 e^{\left[\frac{1}{2}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2})t\right]} + C_2 e^{\left[\frac{1}{2}(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2})t\right]} + \frac{T_1 \cos(\Omega t - \Theta_1)}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}} \quad (3.15)$$

dove

$$\Theta_1 = \arctan\left(\frac{\gamma \Omega}{\Omega^2 - \omega^2}\right). \quad (3.16)$$

---

si impone che la probabilità di trovare la detta particella nell'intero ed infinito spazio che circonda l'atomo è pari all'unità !

La terza (o ennesima equazione), posto

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{2\delta}{\pi} \sin(2a) \quad (3.17)$$

ha analoga soluzione e cioè

$$x_n(t) = C_1 e^{\left[\frac{1}{2}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2})t\right]} + C_2 e^{\left[\frac{1}{2}(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2})t\right]} + \frac{T_n \cos(n\Omega t - \Theta_n)}{\sqrt{(n^2\Omega^2 - \omega^2)^2 + n^2\Omega^2\gamma^2}} \quad (3.18)$$

con le posizioni

$$T_n = (-1)^n \frac{1}{n} \frac{2\delta}{\pi} \sin(na) \quad e \quad \Theta_n = \arctan\left(\frac{n\Omega\gamma}{n^2\Omega^2 - \omega^2}\right). \quad (3.19)$$

Quindi la soluzione definitiva risulta essere la seguente

$$x(t) = A e^{\left[\frac{1}{2}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2})t\right]} + B e^{\left[\frac{1}{2}(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2})t\right]} + \frac{\delta a}{\pi\omega^2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{T_n \cos(n\Omega t - \Theta_n)}{\sqrt{(n^2\Omega^2 - \omega^2)^2 + n^2\Omega^2\gamma^2}}. \quad (3.2)$$

Detta soluzione è composta da una parte transitoria<sup>4</sup> (termini affetti dalle costanti  $A$  e  $B$ ) e da una parte stazionaria.

Quest' ultima è rappresentata graficamente dalle figure 6 e 7.

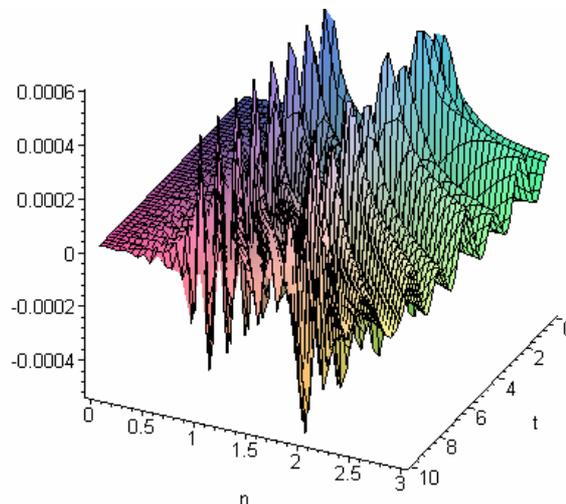


fig. 6

<sup>4</sup> In effetti, dopo un certo tempo, questi termini tendono a zero. Ciò che resta in modo persistente è il fenomeno stazionario rappresentato della parte rimanente dell'equazione (3.2).

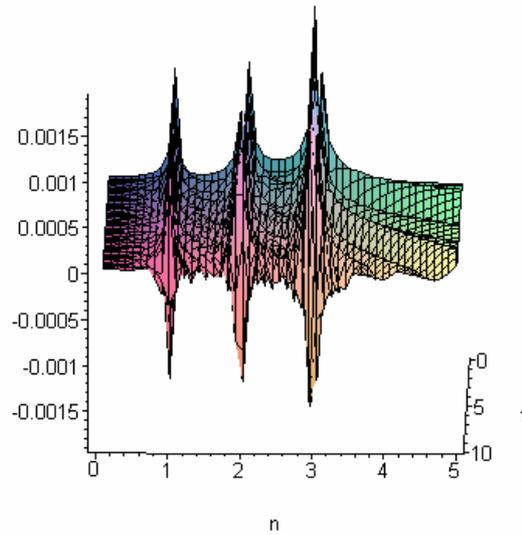


fig. 7

Se si considera la soluzione della nota equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \delta \cos(\Omega t) \quad (3.3)$$

e cioè

$$x(t) = -C_1 e^{\left[\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2}\right)t\right]} - C_2 e^{\left[\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2}\right)t\right]} + \frac{\delta \cos(\Omega t - \Theta)}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \Omega^2 \gamma^2}} \quad (3.4)$$

si vede come la (3.2) sia un'ovvia generalizzazione della (3.4). Per sottolineare le differenze tra le dette soluzioni è necessario un confronto numerico.

## 4. Il confronto

Porremo a confronto le risposte di un identico oscillatore armonico smorzato, una volta soggetto ad un forzante di tipo sinusoidale

$$F = m \delta \cos(\Omega t) \quad (4.1)$$

ed una volta ad un forzante di tipo impulsivo

$$F = \frac{4}{\pi} m \delta \left[ \frac{1}{1} \sin(1a) \cos(1\Omega t) + \frac{1}{3} \sin(3a) \cos(3\Omega t) + \frac{1}{5} \sin(5a) \cos(5\Omega t) + \dots \right] \quad (4.2)$$

i quali sono entrambi rappresentati in fig. 8.

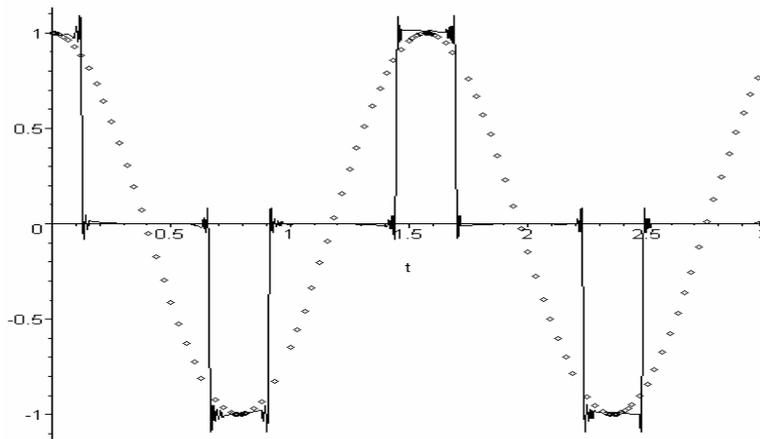


fig. 8

In quest'ultimo caso si ha la seguente equazione

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{4}{\pi} \delta \left\{ \left[ \frac{1}{1} \sin(a) \cos(\Omega t) + \frac{1}{3} \sin(3a) \cos(3\Omega t) + \frac{1}{5} \sin(5a) \cos(5\Omega t) \dots \right] \right\}. \quad (4.3)$$

Posto

$$T_n = \frac{4\delta}{\pi n} \sin(na) \quad (n = 1, 3, 5, 7, \dots), \quad (4.31)$$

si ha la seguente soluzione stazionaria

$$x(t) = T_n \frac{\cos(n\Omega t - \Theta_n)}{\sqrt{(n^2 \Omega^2 - \omega^2)^2 + n^2 \gamma^2 \Omega^2}} \quad (n = 1, 3, 5, 7, \dots) \quad (4.4)$$

La (4.4) presenta picchi di risonanza<sup>5</sup> ogni qual volta

<sup>5</sup> Essi sono molto pronunciati quando il termine dissipativo è molto basso.

$$\frac{\omega}{\Omega} \cong n = (2m-1) \quad (m=1,2,3..) \quad (4.5)$$

e cioè quando il detto rapporto è pari ad un numero intero dispari.  
 Studiamo la risposta della parte stazionaria della (4.4) ed assumiamo i seguenti valori

$$\Omega = 4, \quad a = 0.5, \quad \delta = 10, \quad g = \gamma = 0.01. \quad (4.6)$$

In tal caso il periodo con il quale vengono applicati gli impulsi è  $T = 2\pi/\Omega = 2\pi/4 = 1.57$  sec., mentre la durata dell'impulso è pari a  $\Delta t = 2a/\Omega = 0.25$  sec..  
 Le figure n. 9, 10 ed 11 permettono di valutare il massimo spostamento dell'oscillatore.

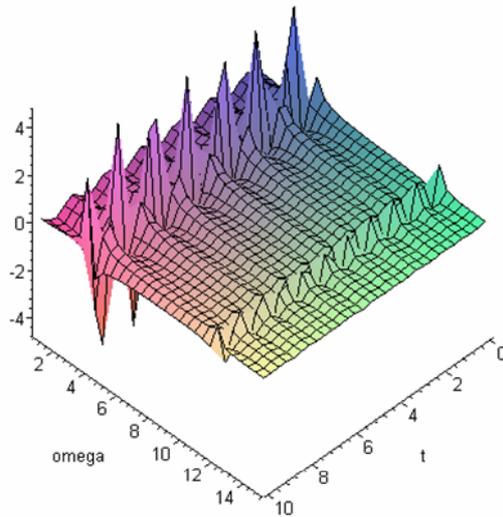


fig. 9

La fig. 9 riporta solo i primi due picchi di risonanza. Per l'esattezza questi picchi si sdoppiano. Come si vede meglio dalle fig. 10 ed 11, essi si hanno in corrispondenza di

$$\omega = \boxed{1} \times 4 = 4 \quad e \quad \omega = \boxed{3} \times 4 = 12. \quad (4.7)$$

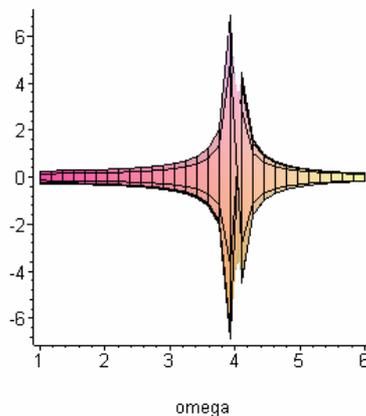


fig. 10

In corrispondenza di  $\omega = 4$  si ha un'ampiezza massima d'oscillazione pari a  $\pm 6.4$  unità. Dalla fig. 11 si ha, in corrispondenza di  $\omega = 4 \times 3 = 12$ , che

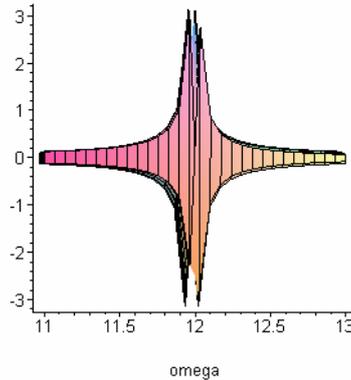


fig. 11

la detta ampiezza è pari a  $\pm 3$  unità.

Calcoliamo adesso la risposta dello stesso oscillatore ipotizzando un forzante rigorosamente sinusoidale.

In tal caso la parte stazionaria è data dalla formula (3.4).

Le figure 12, 13 e 14, che seguono, permettono di valutare la risposta dell'oscillatore armonico smorzato soggetto al detto forzante. Si assumono gli stessi valori del caso precedente e cioè

$$\Omega = 4, \quad \delta = 10, \quad g = \gamma = 0.01. \quad (4.8)$$

In questo caso è evidente che il tempo di applicazione della forza è pari all'intero periodo.

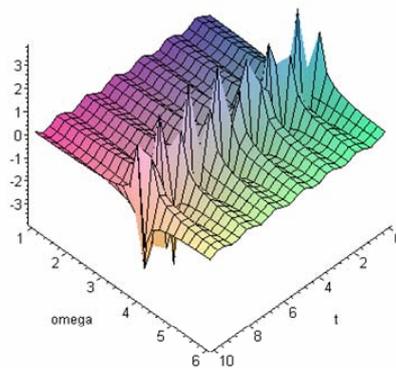


fig. 12

Dalla fig. 12 si evince, com'è noto, l'unica condizione di risonanza<sup>6</sup>  $\Omega \cong \omega$ . La fig. 13 permette di valutare lo spostamento della massa, che è pari a  $\pm 3.6$  unità, molto più piccolo di quello che si ha nel caso precedente.

<sup>6</sup> In effetti, la presenza un attrito non molto forte sposta lievemente le condizioni di risonanza: In questo caso l'unica condizione si ha quando  $\omega$  non coincide esattamente con  $\Omega$  ( $\omega \approx \Omega$ ).

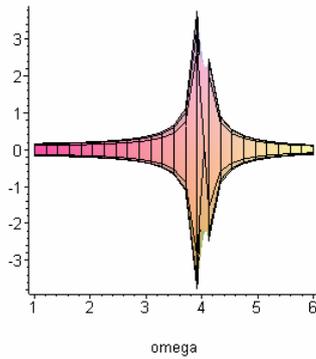


fig. 13

La fig. 14 consente di valutare lo spostamento che si ha in corrispondenza di  $\omega = 12$ .

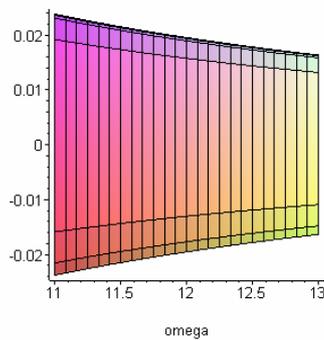


fig. 14

Esso è pari a 0.02 unità, contro il precedente valore pari a 3 e quindi circa 150 volte più piccolo.

E' opportuno, anche per quanto vedremo in seguito, considerare l'esempio di un forzante del tipo

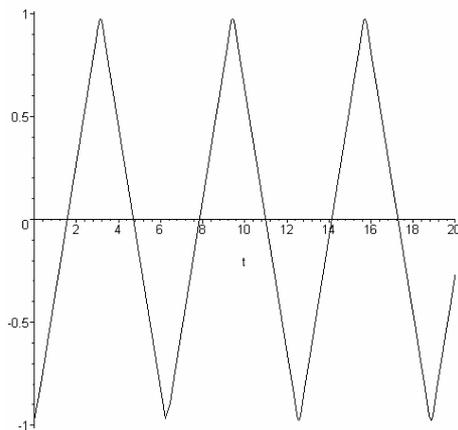


fig. 15

e quindi la corrispondente equazione da risolvere è la seguente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = -\frac{8}{\pi^2} \delta \left[ \frac{1}{1^2} \cos(1\Omega t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\Omega t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\Omega t) + \dots \right] \quad (4.9)$$

Essa, posto questa volta

$$T_n = -\frac{8\delta}{\pi^2 n^2}, \quad (4.91)$$

ha l'analogia soluzione stazionaria

$$x(t) = T_n \frac{\cos(n\Omega t - \Theta_n)}{\sqrt{(n^2\Omega^2 - \omega^2)^2 + n^2\gamma^2\Omega^2}} \quad (n=1,3,5,7,\dots).$$

La fig. 16, sempre per

$$\Omega = 4, \quad \delta = 10, \quad g = \gamma = 0.01,$$

pone in evidenza le risonanze per  $\omega = 4$  e  $\omega = 12$ .

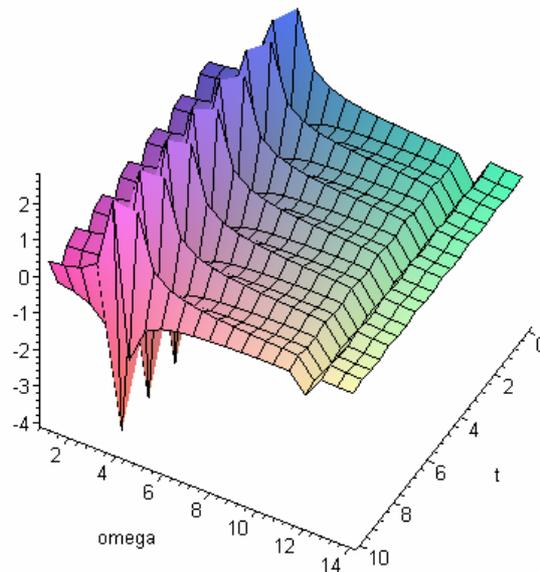


fig. 16

Le fig. 17 e 18 permettono di valutare l'entità delle ampiezze di oscillazione.

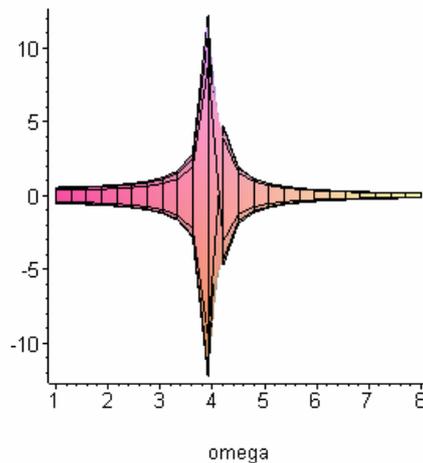


fig. 17

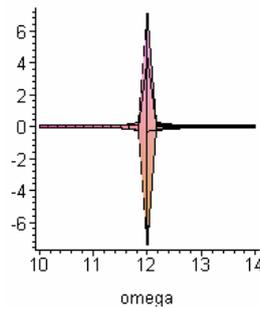


fig. 18

In definitiva, come già osservato in precedenza, la risposta dell'oscillatore soggetto a questo tipo di forzanti, può essere posta nella forma (analisi armonica)

$$x(t) = \frac{T_n}{\sqrt{(n^2\Omega^2 - \omega^2)^2 + n^2\gamma^2\Omega^2}}$$

la quale viene rappresentata nella seguente fig. 20.

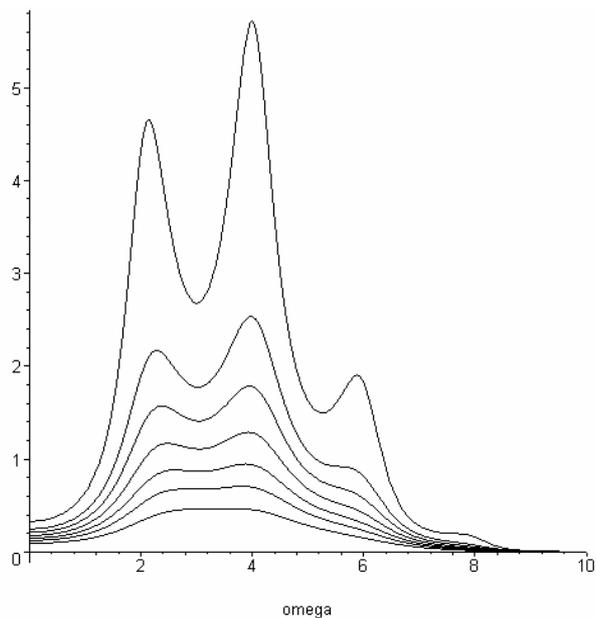


fig. 20

La risonanza si verifica ogni qual volta  $\omega \approx \Omega n$ . La curva più alta ed esterna alle altre è dovuta ad un valore molto piccolo dell'attrito dell'oscillatore. Man mano che  $\gamma$  aumenta i picchi di risonanza tendono ad attenuarsi fino a scomparire quasi del tutto. La fig. 21 riporta solo la curva più bassa (dissipazione d'energia più alta) della fig. 20.

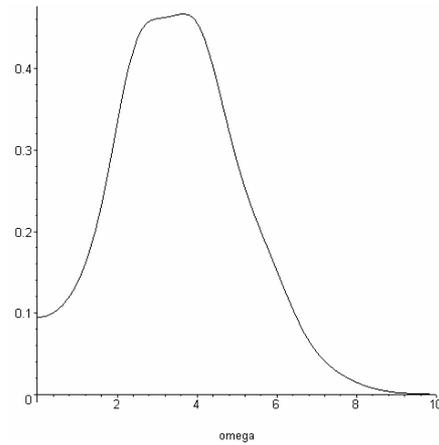


fig. 21

Se invece si considera la classica equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \delta \cos(\Omega t), \quad (4.10)$$

la cui soluzione stazionaria (analisi armonica) è

$$x(t) = \frac{\delta}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \Omega^2 \gamma^2}}, \quad (4.11)$$

si ha il grafico di fig. 22.

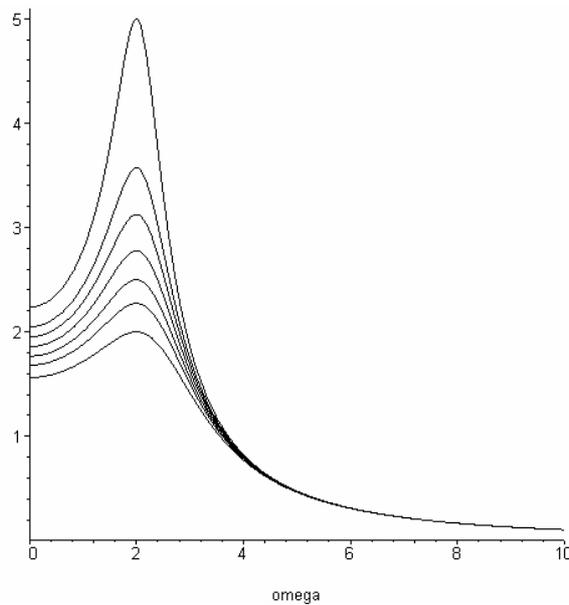


fig. 22

## 5. Qualche considerazione sperimentale

Per verificare sperimentalmente il fenomeno della risonanza, normalmente si usa il dispositivo riportato in fig. 23. Esso consiste in una trave incernierata agli estremi nella cui mezzeria è posto un volano con una massa eccentrica e quindi detto volano non è bilanciato.

Usando variabili velocità angolari, sperimentalmente si verifica che quando la pulsazione  $\Omega$  della massa eccentrica tende a coincidere con quella  $\omega$  propria della trave le ampiezze (tratteggiate in figura) aumentano sempre più fino alla rottura della trave stessa. In questo caso all'oscillatore è applicato un forzante rigorosamente sinusoidale.

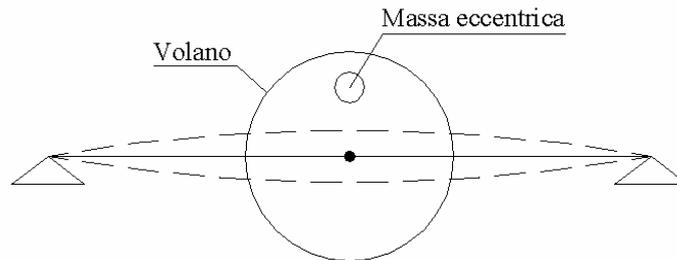


fig. 23

La fig. 24, tratta dal testo [1], riporta il caso in cui detto volano è applicato alla sommità di

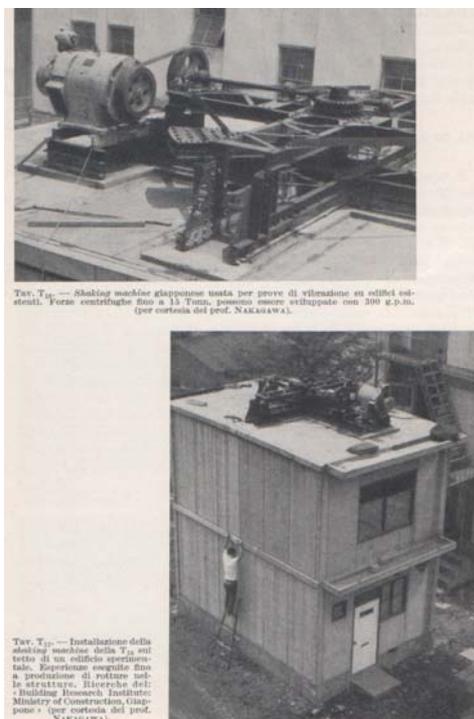


fig. 24

una struttura da sottoporre a studio.

E' il caso di osservare che un operatore che applica un forzante del tipo di quelli esaminati in precedenza produce comunque gli effetti della multirisonanza.

Consideriamo ad esempio il (progetto del) ponte sullo stretto di Messina. E' prevista una campata centrale di ben ml. 3.300.

Se poniamo nella mezzeria di detta campata un volano il cui asse di rotazione sia verticale, certamente detta campata entrerà orizzontalmente in risonanza solo quando  $\omega \approx \Omega^7$ , infatti il forzante è ancora rigorosamente sinusoidale. Ma se la detta struttura viene investita da raffiche di vento con pulsazione  $\Omega$ , altrettanto certamente il pericoloso fenomeno della risonanza si verificherà quando è vera l'identità

$$\omega \approx \Omega n \quad (n = 1, 2, 3..).$$

Resta la domanda se le onde sismiche possano legittimamente approssimarsi con dei forzanti di tipo sinusoidale o se esse sono un fenomeno impulsivo. In merito [1, pag. 305], testualmente si legge:

*I risultati delle ricerche condotte dall'Istituto di Tecnologia di Pasadena sono stati oggetto di molte discussioni. I sismologi americani ritengono che soltanto attraverso la suggestiva ipotesi che il terremoto, lungi dall'essere un fenomeno fisico <continuo>, sia costituito da una serie di impulsi, ci si può dar conto della sua fondamentale irregolarità, che la cinematica spettrale infallibilmente ci rileva.*

E' allora evidente che se gli accelerogrammi registrati durante le scosse telluriche vengono letti con *continuità* allora si ha risonanza, per un sistema ad un solo grado di libertà, solo quando  $\Omega = \omega$ . Se invece gli stessi vengono assimilati ad impulsi, in tal caso si ha l'accennata multirisonanza.

---

<sup>7</sup> Nell'ipotesi di comportamento lineare della struttura.

## 6. Una possibile lettura del sigmogramma.

Il forzante da applicare all'oscillatore smorzato viene dedotto da un generico sismogramma.

Per semplicità, prendiamo in considerazione un esempio tratto dal testo [3].

La fig. 25 riporta le puntuali accelerazioni, in funzione del tempo, a cui viene ad essere assoggettato un oscillatore armonico smorzato.

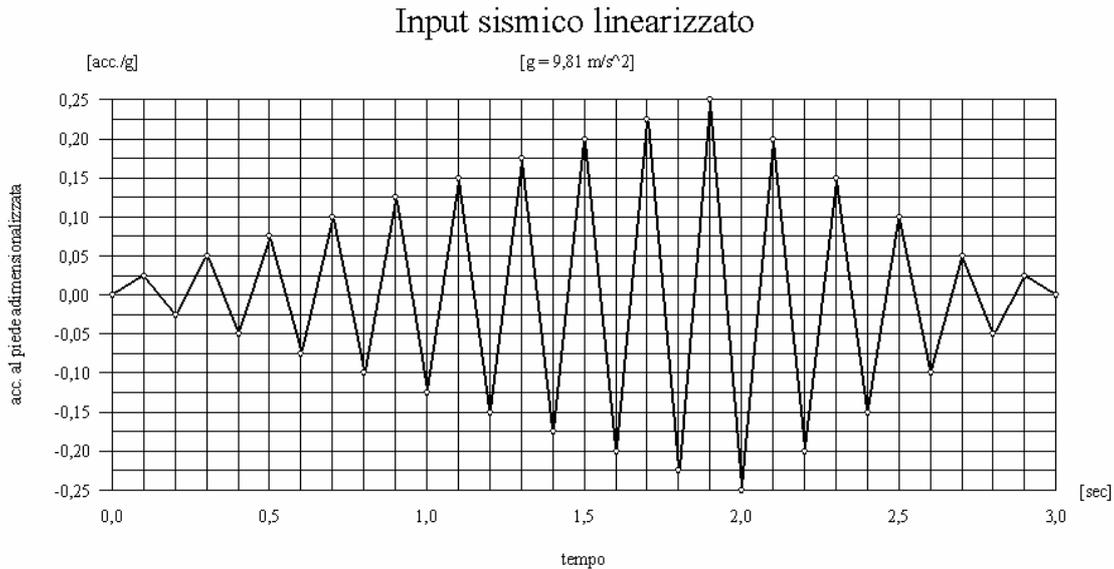


fig. 25

E' noto che la risposta viene valutata con un'integrazione numerica<sup>8</sup>, tramite l'integrale di Duhamel [2,3,4]. In base a quanto detto precedentemente ed in particolare nel caso del forzante di cui alla fig. 25, si vede subito, dato che la pulsazione di detto forzante è costante ed è pari a  $\Omega = 2\pi / 0.2 = 31.41$ , che, con un'approssimazione alla Fourier, vanno in risonanza anche quegli oscillatori con una pulsazione pari ad un multiplo intero dispari di essa.

Certamente non conosciamo come sono intimamente composte le onde sismiche e quindi una qualsiasi ipotesi restrittiva sulla loro natura può provocare grossi danni, ma altrettanto certamente possiamo affermare che un reale oscillatore può andare in risonanza solo ogni qual volta è verificata la condizione più generale

$$\omega = \Omega n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.1)$$

e quindi se trascuriamo questo fatto ci esponiamo ad imprevedibili e grossi rischi.

C'è, a parere dello scrivente, un clamoroso precedente fisico che suffraga quanto in questa sede rilevato e riguarda il noto Problema del Corpo Nero, del tutto simile a quello sismico.

<sup>8</sup> I cui limiti, molto forti, sono ben noti.

Esso consiste nello stabilire con quale meccanismo fisico l'energia luminosa<sup>9</sup> (fenomeno eminentemente oscillatorio) venga assorbita dalla materia (formata da un'infinità di oscillatori armonici ai quali si assimilano gli atomi che formano la parete del Corpo Nero<sup>10</sup>). Per giungere ad una giustificazione teorica di una formula già nota e dedotta sperimentalmente<sup>11</sup>, il famoso fisico tedesco M. Planck fu condotto e costretto a formulare, pena la mancata giustificazione della detta relazione sperimentale, l'incredibile<sup>12</sup> ipotesi che l'energia fosse formata da pacchetti indivisibili. Più esattamente Egli fu costretto ad ammettere esplicitamente che un *oscillatore armonico* (atomo) non può assorbire energia con continuità, bensì per pacchetti o pillole indivisibili. Questo *postulato*<sup>13</sup> è espresso dalla Sua *ancora empirica* e altrettanto famosa relazione<sup>14 15</sup>

<sup>9</sup> Per l'esattezza energia delle onde elettromagnetiche.

<sup>10</sup> Qui le cose sono molto più semplici. Infatti i vari oscillatori armonici che costituiscono la parete del Corpo Nero (atomi) possono essere considerati scollegati tra loro. Invece, nel caso di una struttura, abbiamo masse distribuite e collegate elasticamente tra loro.

<sup>11</sup> Bisognerebbe diffidare di equazioni dedotte in tal modo. Infatti all'esperimento può sempre sfuggire qualcosa; strumenti più precisi possono porre in evidenza effetti inimmaginabili. La formula che descrive con una buona approssimazione le esperienze che si è riusciti a produrre in laboratorio (giustificata a posteriori da Planck) è la nota relazione

$$E_{\lambda} = hC^2 \lambda^{-5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hC}{kT\lambda}\right) - 1}.$$

La formula (ovviamente anch'essa empirica) che meglio rappresenta gli esperimenti eseguiti è invece quella di Pringsheim-Lummer (vedi H. Kangro, **Early History of Planck's Radiation law**, Taylor & Francis L.t.d., London (1976)

$$E_{\lambda} = hC^2 \lambda^{-5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hC}{kT\lambda}\right) + \exp\left(-\frac{kT\lambda}{hC}\right) - 1}.$$

Va comunque osservato che la curva reale (vedi P. Rossi **Storia della Scienza** Utet Vol. III (\*) pag. 94) presenta delle vistose depressioni simili agli *avvallamenti* di fig. 20, deformazioni che non sono riprodotte da queste relazioni e che, verosimilmente, sono appunto dovute alla multirisonanza.

<sup>12</sup> Il primo a non crederci fu proprio Planck, e siamo agli inizi del secolo scorso. Egli, com'è noto, trascorse tutto il resto della sua vita alla ricerca di una ragionevole spiegazione di questa astrusa ipotesi. Fino ad oggi nessuno è mai riuscito a tanto. Poi, col passare del tempo, l'incredibile viene passivamente accettato e ciò è dovuto sia all'umano e misericordioso spirito di assuefazione che alla successiva *interpretazione*, se vogliamo chiamarla così, di altri fatti sperimentali.

<sup>13</sup> I postulati di una Teoria che pretende di interpretare i fenomeni naturali dovrebbero essere immediatamente chiari ed evidenti e ciò per definizione stessa dei postulati: questa è la regola fondamentale di una Teoria. Invece, molto spesso, le affermazioni di partenza, anche se corrette, sono dei veri e propri teoremi tutti da dimostrare. E non è solo una pura questione di comprensione gnoseologica (E. Mach invocava, tra l'altro, l'economia di pensiero) in quanto si corre il grosso rischio di vedere la realtà attraverso una lente fortemente distorta che ha, ciò che è peggio, un incognito e congenito grado di miopia.

<sup>14</sup> Da cui è nata l'attuale Meccanica Quantistica.

<sup>15</sup> Nel caso dei corpi elastici si ipotizza l'esistenza dei fononi, in analogia con i fotoni dell'energia elettromagnetica (6.1). In proposito si osserva che la forza elastica è riconducibile alla forza elettrica che lega gli atomi di una sostanza. Infatti, è possibile mostrare [6] che il modulo di elasticità di una qualsiasi sostanza omogenea è desumibile dalla perfettibile relazione

$$E_{Young} = \frac{2e^2}{d^4} [\text{dyne} / \text{cm}^2],$$

dove  $e$  è la carica dell'elettrone e  $d$  è la distanza interatomica, quest'ultima determinata con l'analisi spettroscopia della sostanza. Sussistono inoltre analoghe relazioni che consentono di determinare il coefficiente di dilatazione termica e la velocità del suono nella materia considerata, tutte riconducibili alla

$$E = h\nu n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (6.1)$$

dove  $h$  è la costante di Planck,  $\nu$  è la frequenza della radiazione elettromagnetica ed  $n$  è un numero rigorosamente intero, relazione fondante dell'attuale Meccanica Quantistica.

Ora questa enigmatica formula<sup>16</sup> (6.1) può anche essere scritta, con l'introduzione della pulsazione, così

$$E = h\nu n = h \frac{\Omega}{2\pi} n$$

e, posto, come di consueto

$$\frac{h}{2\pi} = \hbar,$$

anche

$$E = \hbar \Omega n.$$

Ma da questa equazione possiamo ricavare il rapporto  $E/\hbar$ , il quale rappresenta evidentemente un'altra pulsazione, ed allora abbiamo

$$\frac{E}{\hbar} = \omega = \Omega n,$$

formula che già conosciamo.

Ma allora, (atteso che il trasferimento di energia tra due sistemi vibranti non può che essere regolato dal fenomeno della risonanza), possiamo affermare che la presunta discontinuità dell'energia – (dovuta alla presenza degli altrettanto enigmatici numeri interi) - sia riconducibile ad una semplice, immediata e comprensibile condizione di multirisonanza ?

---

carica dell'elettrone, alla massa e alla detta distanza. In altri termini, tra grandezze macroscopiche (che attualmente determiniamo solo in laboratorio) e microscopiche esistono degli evidenti legami.

<sup>16</sup> Con essa si arguirebbe, tra l'altro, che la quotidiana macroscopica realtà mascheri una reale discontinuità microscopica per la piccolezza della costante di Planck.

## 7. L'assorbimento dell'energia sismica.

Uno sciame di sollecitazioni sismiche (o quanto altro di analogo), sicuramente di natura random<sup>17</sup>, può essere costituito da un qualsiasi tipo di onde a molteplici armoniche.

Un complesso sistema strutturale può essere assimilato, in prima istanza, da un insieme di oscillatori armonici, non collegati tra loro. E' possibile comunque imporre tra gli stessi la condizione di congruenza spaziale.

Poiché un oscillatore armonico smorzato può andare in risonanza, come visto, solo ogni qualvolta è verificata la condizione

$$\omega \cong \Omega n \quad (n = 1, 2, 3...),$$

è opportuno valutare le modalità di assorbimento dell'energia sismica da parte dello stesso, nella semplicissima ipotesi che esso sia unico. Se, ad esempio, si considera la (3.2), possiamo calcolare l'energia assorbita con la relazione

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \quad (7.1)$$

Per essa si ha la seguente condizione di stazionarietà

$$E = \frac{1}{2}m \left[ \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \frac{2\delta}{\pi n} \sin(na) n \Omega \sin(n\Omega t - \Theta_n)}{\sqrt{(n^2\Omega^2 - \omega^2)^2 + n^2\gamma^2\Omega^2}} \right]^2. \quad (7.2)$$

In concomitanza delle risonanze si ottiene

$$n^2\Omega^2 = \omega^2 \Rightarrow \Theta_n = \arctan\left(\frac{n\Omega\gamma}{n^2\Omega^2 - \omega^2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (7.3)$$

e quindi, trascurando i prodotti multipli che generano altre righe di assorbimento, si ha più semplicemente

$$E_{\max} = \frac{1}{2}m \left(\frac{2\delta}{\pi\gamma}\right)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2(na) \sin^2(n\Omega t - \pi/2)}{n^2} = \frac{1}{2}mV^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2(na) \cos^2(n\Omega t)}{n^2}. \quad (7.4)$$

Tenuto conto che

$$\Delta t = \frac{2a}{\Omega} \quad e \quad \omega = \Omega n \quad (7.41)$$

la (7.4), posto

<sup>17</sup> In effetti, se è vero che ci troviamo nell'impossibilità di poter formulare con certezza delle ipotesi circa la composizione di una qualsiasi sollecitazione periodica, è pur vero che un oscillatore armonico può andare in risonanza solo sotto la condizione  $\omega \cong \Omega n$ . Possiamo allora dire che l'oscillatore armonico smorzato funge da filtro, lasciandosi attraversare da certe sollecitazioni e catturandone altre.

$$V = \frac{2\delta}{\pi\gamma} \quad (7.5)$$

diventa

$$E_{\max} = \frac{1}{2} m V^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2} \Delta t\right) \cos^2(\omega t)}{n^2} \quad (7.6)$$

e quindi il termine generico massimo dell'energia è dato dall'espressione

$$E_n = \frac{1}{2} m \bar{V}^2 \frac{1}{n^2} \quad (7.61)$$

avendo posto

$$\bar{V} = V \sin\left(\frac{\omega}{2} \Delta t\right). \quad (7.7)$$

La fig. 26, che segue<sup>18</sup>, denuncia sotto quali pulsazioni l'oscillatore di pulsazione propria  $\omega$ , assorbe energia (formula 7.2).

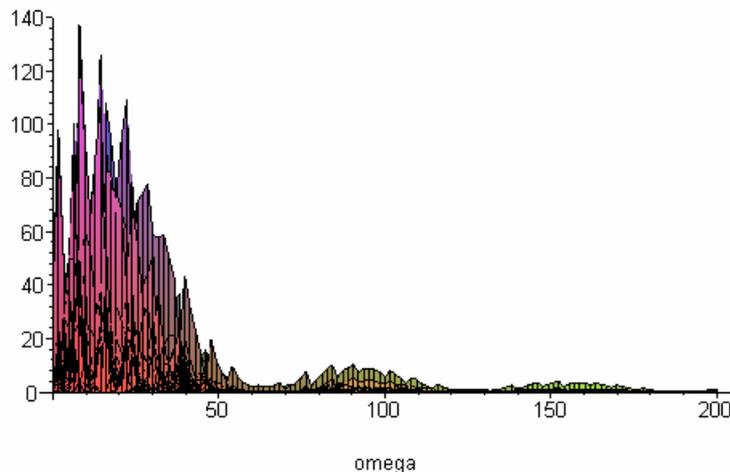


fig. 26

E' opportuno osservare che le varie righe di assorbimento si addensano intorno a particolari pulsazioni (struttura fina).

Considerando le armoniche della (7.2) si ha

$$E = \frac{1}{2} m \left[ \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \frac{2\delta}{\pi} \Omega \sin(na)}{\sqrt{(n^2 \Omega^2 - \omega^2)^2 + n^2 \gamma^2 \Omega^2}} \right]^2. \quad (7.8)$$

<sup>18</sup> In questa figura si è fissato  $\Omega$  e si è fatto variare  $\omega$ .

Le figure che seguono<sup>19</sup>, per vari valori crescenti di  $\gamma$ , consentono di avere un'idea della (7.8).

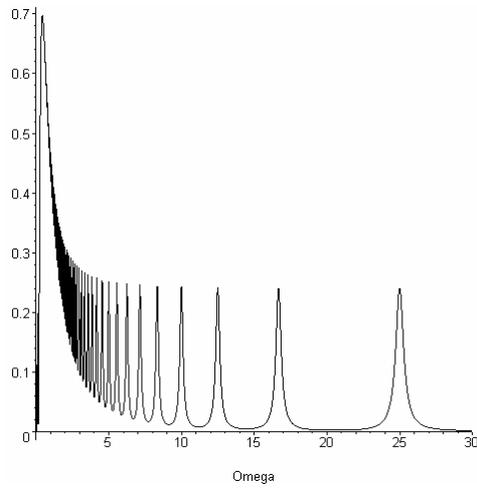


fig. 27

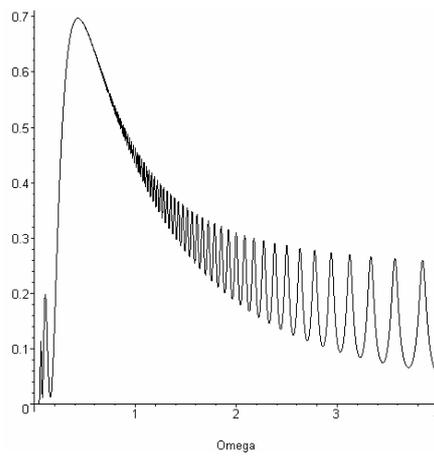


fig. 28

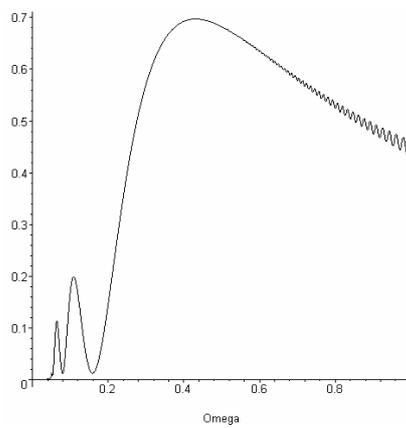


fig. 29

---

<sup>19</sup> Nelle seguenti figure si è invece fissato il valore di  $\omega$  e si è fatto variare  $\Omega$ .

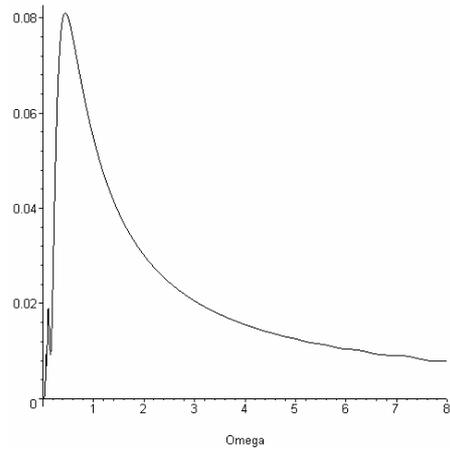


fig. 30

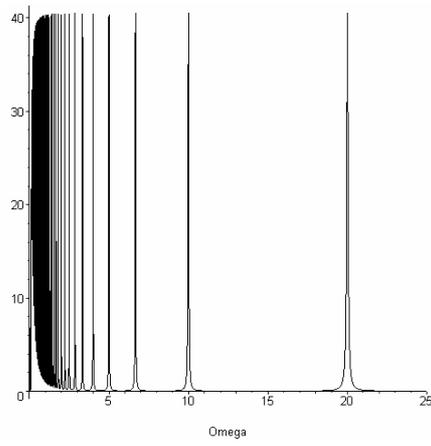


fig. 31

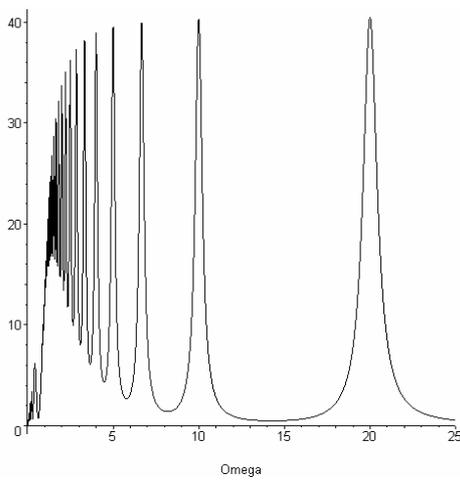


fig. 32

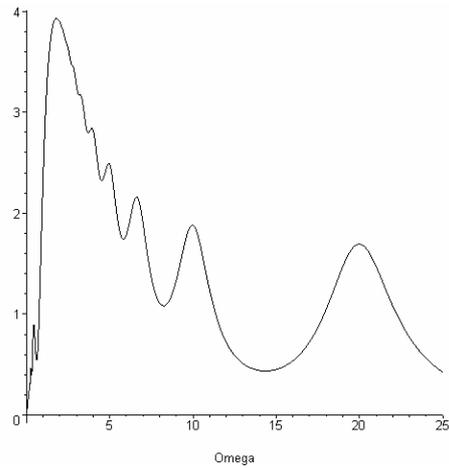


fig. 33

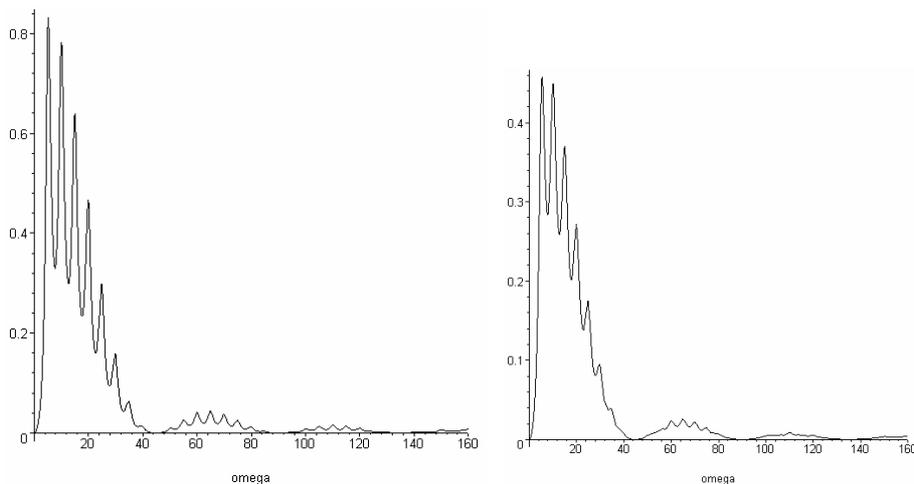
Le pagine che seguono rappresentano invece la formula

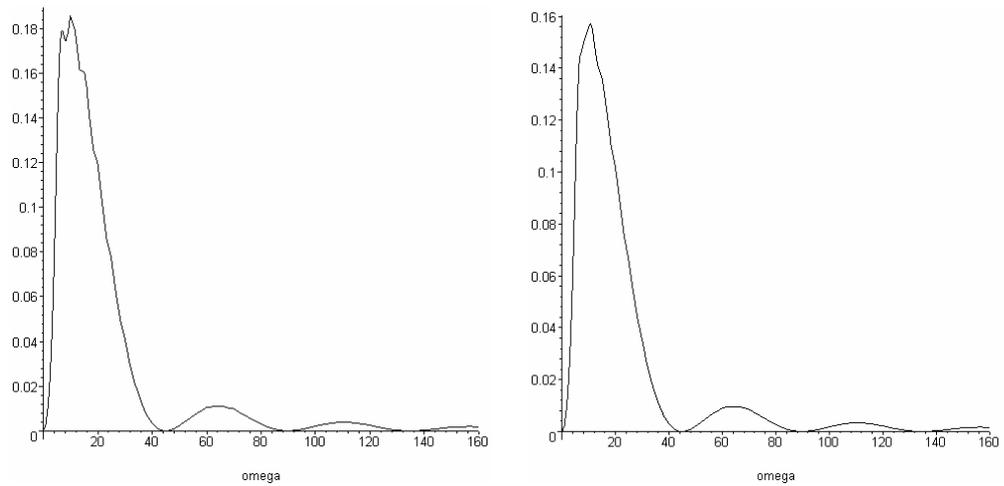
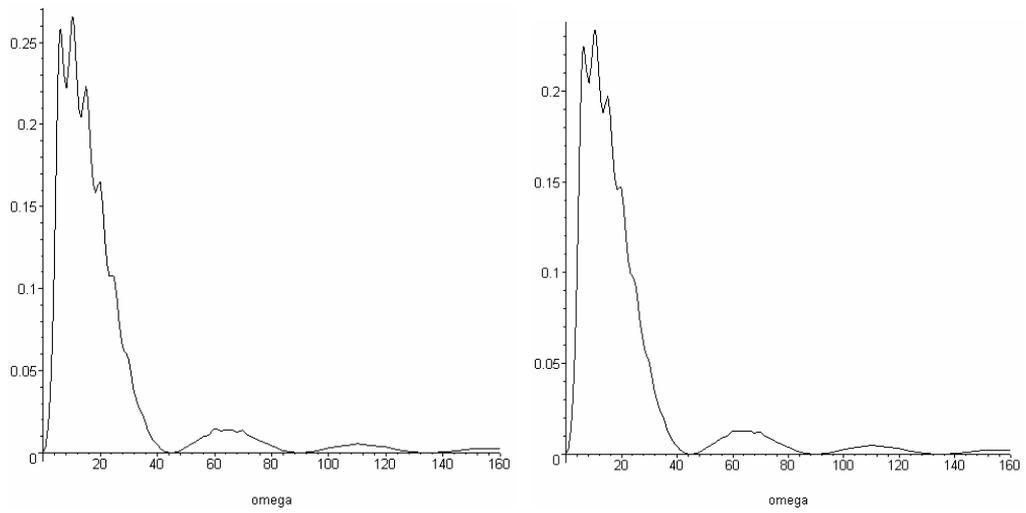
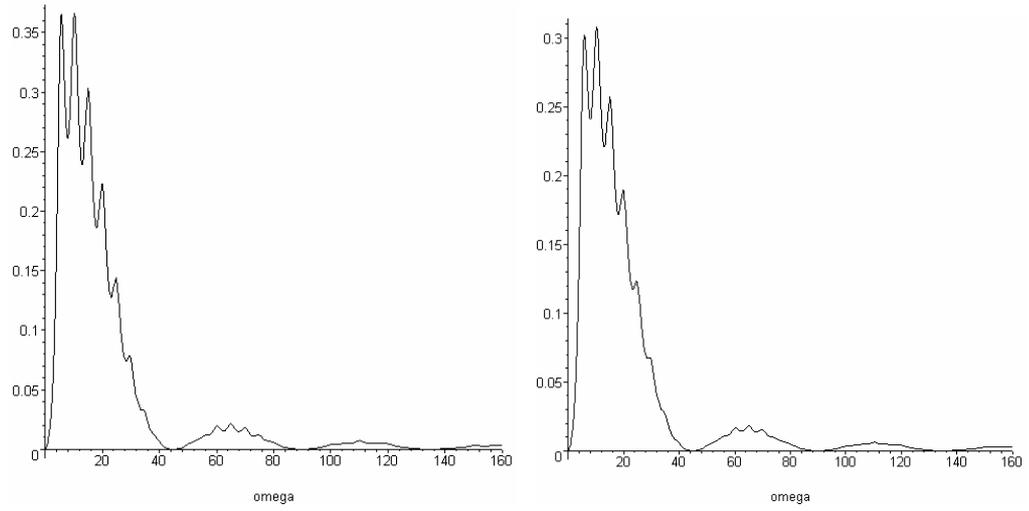
$$E = \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{(-1)^n \frac{2\delta}{\pi} \Omega \sin(na)}{\sqrt{(n^2 \Omega^2 - \omega^2)^2 + n^2 \gamma^2 \Omega^2}} \right]^2 \quad (7.9)$$

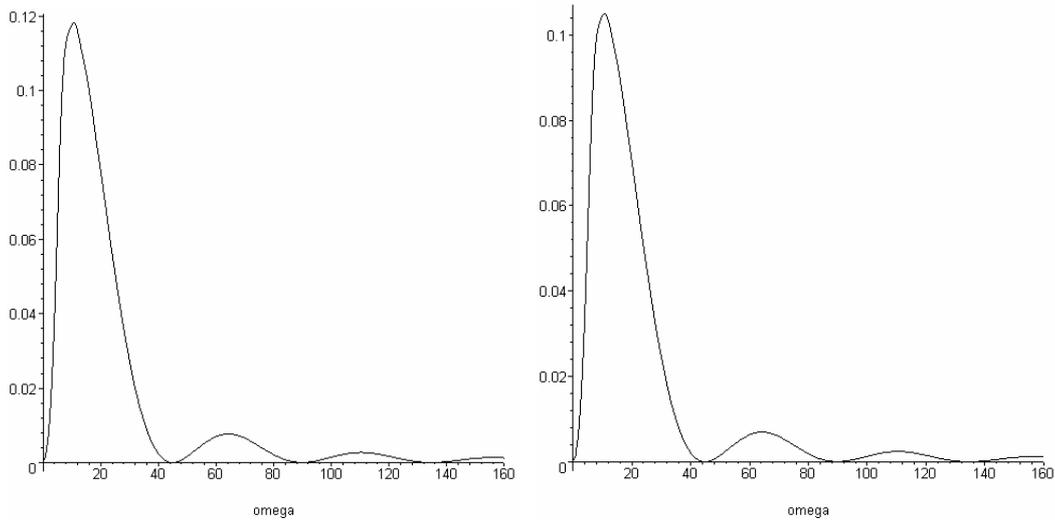
che traslascia i prodotti multipli, fissa il valore di  $\Omega$  assumendo come variabile  $\omega$ .

I grafici riportati in appresso rappresentano la (7.9) per i seguenti valori

$$\delta = 10 \quad a = 0.07 \quad \Omega = 5 \quad \gamma \in [2.5, 10.5] \quad (7.10)$$







Anche qui si notano delle righe di assorbimento che si trasformano in sinusoidi. Si può osservare come le varie righe di assorbimento, ben evidenti nei primi grafici, man mano che aumenta il valore di  $\gamma$ , tendono a scomparire. Viceversa, per valori di  $\gamma$  sempre più piccoli, le varie righe tendono ad assumere un unico valore energetico. La fig. 34, che segue

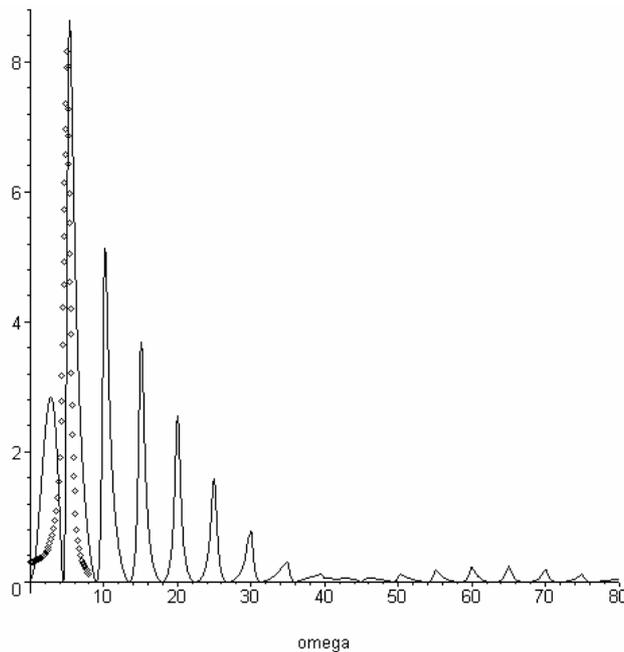


fig. 34

riporta, con tratto continuo, la (7.9) e, rappresentata per punti, la formula classica

$$E = \frac{1}{2} m \left[ \frac{\delta \Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}} \right]^2 \quad (7.11)$$

Come si vede dal confronto, mentre con la (7.9) si ha un ampio assorbimento che riguarda tutte le numerabili pulsazioni dell'intervallo  $\omega \in [0, \infty]$ , con la (7.11) si ha una sola riga. Da ciò si intravede un'altra nuova soluzione per il Problema del Corpo Nero.

Se quindi un singolo oscillatore armonico ha infinite e numerabili condizioni di risonanza a cui corrispondono diversi gradi di assorbimento dell'energia, si può dire che non è più valido il Principio di Equipartizione dell'Energia<sup>20</sup> che si trae dalla Meccanica Classica, o meglio esso viene ulteriormente precisato. Prendiamo in considerazione la fig. 32. Con essa abbiamo un oscillatore con pulsazione propria  $\omega$ , soggetto ad un forzante esterno con pulsazione  $\Omega$  e quest'ultima varia con la più assoluta continuità. Da detta figura si evince che l'oscillatore assorbe invece energia in modo discreto. Quando  $\Omega$  è nulla è pure nulla l'energia assorbita. Man mano che  $\Omega$  aumenta le punte estreme degli assorbimenti tendono ad aumentare per poi giungere ad un valore asintotico costante. Quindi, per valori crescenti di  $\Omega$  e per i prescelti valori di  $\gamma$ , le dette punte delle righe di assorbimento tendono a livellarsi. Si può dunque dire che per valori elevati di  $\Omega$  e solo per un particolare valore di  $\gamma$  si ritrova come caso limite il detto Principio.

Inoltre, se si ammette che la radiazione elettromagnetica è rappresentabile da un forzante del tipo (3.1) e si pone, nel caso dell'atomo di idrogeno,

$$\bar{V} = \frac{C}{137} \quad (7.12)$$

allora la (7.6) coincide con la relazione di Bohr. In tal caso la (7.6) diventa

$$E_{\max} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{137^2} \frac{1}{n^2} \quad (7.13)$$

dove  $C$  è la velocità della luce,  $m$  è la massa dell'elettrone ed  $1/137$  è la costante di struttura fina. Poiché è noto che

$$2\pi 137 e^2 = h C, \quad (7.14)$$

dove  $e$  è la carica dell'elettrone ed  $h$  è la costante di Planck, la (7.13) diventa

$$E_{\max} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \frac{1}{n^2} \quad (7.15)$$

che è la famosa relazione di Bohr. Ma Egli ottiene la (7.15) con una nutrita serie di postulati in aperta contraddizione con acclarati fatti sperimentali, previsti dalla consolidata meccanica classica, ed usando un espediente matematico non ancora caduto del tutto in disuso. Più tardi Bohr confidò al giovane Heisenberg [8] questi fatti ed il Suo profondo scetticismo nell'impossibilità della Meccanica Classica di interpretare i fenomeni microscopici. Detto in breve, si riportano i *nuovi e forti postulati* che Egli dovette assumere per giungere a spiegare le righe dell'atomo di idrogeno.

---

<sup>20</sup> Secondo questo Principio, che genera la famosa Catastrofe Ultravioletta (Rayleigh & Jeans), risolta da Planck con l'ipotesi del quanto di energia, l'energia si equipartirebbe tra tutti gli oscillatori. Esso viene ricavato in Meccanica Classica considerando il noto oscillatore armonico, privo di resistenza e con una sola condizione di risonanza.

- Con Bohr occorre ammettere che l'elettrone può ruotare intorno al nucleo solo su particolari orbite in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri interi<sup>21</sup>.
- Occorre ammettere che l'elettrone, pur percorrendo le Sue particolari orbite circolari di raggio  $r_n$ , non emette radiazioni e ciò in aperto ed irrisolto contrasto con il fatto acclarato che una carica accelerata emette radiazioni elettromagnetiche. Più precisamente, è necessario ammettere che l'azione che subisce la detta carica da parte del nucleo non abbia un qualsivoglia valore (come avviene in Meccanica Classica) ma sia un multiplo esatto dell'azione  $h$ , che compare nella formula empirica di Planck (6.1).
- Occorre ammettere che esiste un postulato, detto *meccanico*, secondo il quale  $E = h\nu n$  e un altro postulato, detto ottico o monco, ancora in uso, secondo il quale invece  $E = h\nu$ . Se invece coerentemente si ammette sempre e solamente la (6.1), com'è facile verificare, si ottiene una relazione diversa dalla (7.12), la quale è in netto contrasto con i fatti sperimentali: al posto di  $n^2$  si ha  $n^3$ . E' questo il banale espediente matematico.

Quando Bohr sottopose la Sua teoria all'Autorevole Ernest Rutheford ebbe questa risposta:

*Dear Dr. Bohr*

*I received your paper and I read it with great interest.. . Your ideas about the origin of the hydrogen spectrum are very clever and seem to work fine, but the mixing of Planck's ideas with the old mechanics makes it difficult to obtain a physical idea on which the whole argument should be based. ...*

20 March 1913

*E. Rutherford*

Se si considera il termine generico

$$x(t) = \Psi_n = \frac{T_n}{\sqrt{(n^2\Omega^2 - \omega^2)^2 + n^2\gamma^2\Omega^2}} \quad (7.16)$$

in condizioni di risonanza ( $n\Omega = \omega$ ) si ha, per la (7.7),

$$\Psi_n = \frac{T_n}{\pm\gamma(n\Omega)} = \frac{(-1)^n \frac{1}{n} \frac{2\delta}{\pi} \sin(na)}{\pm\gamma\omega} = \frac{\left(\frac{1}{\gamma} \frac{2\delta}{\pi} \sin\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)\right)}{n\omega} = \frac{\left(\frac{C}{137}\right)}{2\pi\nu n} = \frac{1}{2\pi 137 n} \frac{C}{\nu} = \frac{\lambda}{2\pi 137 n}, (7.17)$$

dove  $C$  è la velocità della luce e  $\lambda$  è la lunghezza d'onda elettromagnetica. Da ciò si ha la nuova relazione che lega l'ampiezza di risonanza della carica alla lunghezza d'onda elettromagnetica che essa genera<sup>22</sup> e cioè [9]

<sup>21</sup> Invece in Meccanica Classica questi raggi possono assumere con continuità tutti i valori del campo nei numeri reali.

$$\lambda = 2\pi 137 \Psi_n n. \quad (7.18)$$

Questa stessa relazione la si può ottenere indipendentemente da quanto detto nel presente lavoro [9].

Dalla (7.18) segue che  $\Psi_n$  coincide con il raggio  $r_n$  di Bohr. Infatti moltiplicando la (7.18) per la frequenza  $\nu$  si ha

$$\lambda \nu = C = 2\pi 137 \Psi_n \nu n = 137 \Psi_n \omega n = 137 \nu_n n \quad (7.19)$$

da cui segue

$$\nu_n = \frac{C}{137 n} \quad (7.20)$$

D'altro canto, nel caso del dipolo protone-elettrone, si può scrivere che

$$\nu_n = \sqrt{\frac{e^2}{m\Psi_n}} \quad (7.21)$$

ed uguagliando queste ultime due equazioni si ha

$$\Psi_n = \frac{e^2}{mC^2} 137^2 n^2 = R_e 137^2 n^2 \quad (7.22)$$

avendo indicato con  $R_e$  il raggio classico dell'elettrone. Tenuto conto dell'identità (7.14), si ha che la (7.22) può essere scritta

$$\Psi_n = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 m} n^2 \quad (7.23)$$

che coincide con la relazione di Bohr. Tenuto conto che la (7.18), introducendo la relazione di de Broglie, può essere scritta

$$\lambda = \lambda_{dB} 137 n \quad (7.24)$$

si ha il legame tra l'onda elettromagnetica e l'onda di de Broglie.

Con ciò si risolve anche il pesante ed onnipresente paradosso onda-corpuscolo. Infatti l'elettrone, o in genere una qualsiasi particella carica, ha intrinsecamente il familiare aspetto corpuscolare, quando è libera. Nel caso in cui essa fa parte di un dipolo, è costretta, dal fenomeno della risonanza, a vibrare in perfetta sintonia con l'onda elettromagnetica e pertanto acquisisce, in dette circostanze, tutte le caratteristiche dei fenomeni ondulatori. Si osserva infine che se si assume 137 pari all'unità l'onda di de Broglie si identifica con quella elettromagnetica.

---

<sup>22</sup> Sia in elettrodinamica classica che quantistica si ammette che la frequenza di una radiazione elettromagnetica coincide con quella del dipolo che la genera. Nulla è detto circa l'eventuale legame tra l'ampiezza  $\Psi$  di vibrazione della carica e la lunghezza d'onda elettromagnetica  $\lambda$  che essa genera.

La relazione (7.24) può essere verificata rifacendo l'esperienza che verifica la relazione di de Broglie e misurando anche la radiazione elettromagnetica che si manifesta durante lo stesso esperimento.

Si può pertanto dire che le incredibilmente mute orbite di de Broglie sono tali perché costituiscono appunto i momenti in cui l'onda elettromagnetica viene assorbita dalla materia.

Dunque è possibile specializzare la soluzione della (3.1) nel caso dell'atomo di idrogeno, determinando i valori da attribuire alle grandezze  $\gamma$ ,  $\omega$ ,  $\delta$  e  $\Delta t$ . Con ciò è poi finalmente possibile descrivere con la massima precisione tutte le caratteristiche meccaniche che intervengono nella fase di interazione tra l'onda e l'atomo (variabili nascoste). E quindi viene interpretata anche la relazione di indeterminazione di Heisenberg in quanto è adesso più che comprensibile l'esistenza di quelle variabili nascoste ipotizzate da Einstein, strenuo avversario della casualità delle leggi della fisica (Iddio non gioca a dadi).

Se, per esempio, la posizione (7.12)

$$\frac{2}{\pi} \frac{\delta}{\gamma} \sin(na) = \frac{2}{\pi} \frac{\delta}{\gamma} \sin\left(\frac{1}{2} na\right) = \frac{2}{\pi} \frac{\delta}{\gamma} \sin\left(\frac{1}{2} \Omega n \Delta t\right) = \frac{2}{\pi} \frac{\delta}{\gamma} \sin\left(\frac{1}{2} \omega \Delta t\right) = \frac{C}{137}$$

viene ulteriormente precisata ponendo

$$\frac{\delta}{\gamma} = C \quad (7.25)$$

e

$$\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{1}{2} \omega \Delta t\right) = \frac{1}{137}, \quad (7.26)$$

si ha quanto segue. Dalla (7.25) si deduce che

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\bar{V} \omega}{\gamma} = \frac{C}{137} \frac{\omega}{\gamma} = C \longrightarrow \gamma = \frac{\omega}{137}, \quad (7.27)$$

quindi lo smorzamento è minore della pulsazione. Dalla (7.26) si ha che la durata dell'impulso elettromagnetico è pari a

$$\Delta t = \frac{1}{2} \frac{T}{137} \quad (7.28)$$

dove  $T$  indica il periodo dell'oscillatore. Pertanto la durata dell'impulso esterno è 274 più piccola del tempo che impiega l'elettrone a percorrere la sua orbita.

E' da osservare che con le attuali conoscenze [11], a differenza di quanto si rileva dalla (7.18), si sa solo che la lunghezza d'onda elettromagnetica è molto più grande del raggio classico dell'elettrone [11, p. 27] e cioè che

$$\lambda = \frac{C}{\nu_o} \gg \frac{e^2}{mC^2} \quad (7.29)$$

e che, a differenza della (7.27),

$$\gamma \ll \omega. \quad (7.30)$$

Questi sono i primi risultati che si ottengono **se si vuole** interpretare l'empirica relazione di Planck come una più che coerente condizione di risonanza, sebbene più generale di quella da sempre tacitamente ipotizzata in fisica teorica.

Fin qui abbiamo dato dei cenni al dipolo elettromagnetico. In modo del tutto analogo può essere considerato anche il dipolo gravitazionale (sistema binario  $M + m$ ) [7], con una evidente ed immediata generalizzazione anche della (7.18). Infatti quest'ultima può essere scritta in forma più generale

$$\lambda = 2\pi \frac{C}{V} \Psi n \quad (7.31)$$

avendo indicato con  $V$  la velocità media della carica o della massa in fase di assorbimento. Se l'onda gravitazionale che colpisce il dipolo ha una velocità pari a quella della luce, allora la (7.10) si specializza. In tal caso si ha che la lunghezza d'onda fondamentale  $\bar{\Psi} = 2\pi \Psi = 2\pi GM / C^2$  è pari alla semilunghezza della circonferenza di Schwarzschild<sup>23</sup>. Potrebbe essere questa una strada per risolvere l'attuale problema della quantizzazione dell'energia gravitazionale.

Ma forse sarebbe opportuno prima ricondurre la gravità ad interazioni già note !

Per completezza, occorre rilevare che anche se si considera la non linearità del campo elettrico [5] (oscillatore non lineare o kepleriano<sup>24</sup>) e cioè l'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \frac{\omega^2 x}{\left(1 - \varepsilon \frac{x}{p}\right)^2} = \delta \exp(-i\Omega t) \quad (7.32)$$

si ritrovano le multirisozanze del singolo oscillatore. Infatti la soluzione stazionaria della (7.32) è del tipo [7]

$$x(t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{T_n \omega^2}{(n^2 \Omega^2 - \omega^2 + i \gamma n \Omega)} \exp(-i n \Omega t). \quad (7.33)$$

<sup>23</sup> Si noti come ruolo del raggio classico dell'elettrone della (7.14) venga assunto da quello di Schwarzschild.

<sup>24</sup> Con il quale si ha un'altra soluzione del problema del Corpo Nero.

## 8. Bibliografia

- [1] E. Perri **INGEGNERIA ANTISISMICA** , UTET (1966)
- [2] M. Como – G. Lanni **ELEMENTI DI COSTRUZIONI ANTISISMICHE**, Cremonese Editore (1979)
- [3] C. Gavarini **INGEGNERIA ANTISISMICA**, ESA, Roma (1980)
- [4] M. Ferraioli **Corso di Costruzioni in Zona Sismica – Valutazione numerica dell'integrale di Duhamel** II<sup>a</sup> Università di Napoli - Facoltà d'Ingegneria Aprile 2004
- [5] C. Santagata **Resonance Frequencies and Planck's Formula**,  
<http://www.carlosantagata.it>
- [6] C. Santagata **Unsuspectable Connection from...**, <http://www.carlosantagata.it> (2005)
- [7] C. Santagata **Vibrations mechanics: Atoms, nuclei and resonances**, Journal of Information & Optimization Sciences Vol. 23 (2002), N°3, pp. 585-619
- [8] W. Heisenberg **Tradition in der Wissenschaft**, R. Piper & Co., Verlag, München (1977)
- [9] C. Santagata **New Quantum Relations**, <http://www.carlosantagata.it> (2005)
- [10] C. Santagata **Quantum Contents of Classical Oscillators** (Edizioni Teresa Musco October 1992)
- [11] W. Hitler **The Quantum Theory of Radiation** (Oxford at the Clarendon Press)